উচ্চমাধ্যমিক গণিত

তৃতীয় খণ্ড স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

শ্রী সত্যেন্দ্র মোহন সেনগুপ্ত
শ্রী অলক নাথ হালদার

Approved Syllabus of the West Bengal Council of Higher Secondary Education, as a text book on Co-ordinate Geometry for Classes XI & XII, has been strictly followed.

উচ্চ মাধ্যমিক গণিত

তৃতীয় খণ্ড ঃ স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

[একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর জন্য]

(১৯৭৯ সংস্করণ)

শ্রীসত্যেন্দ্রমোহন সেনগুপ্ত, এম-এস্-সি.
গণিতের প্রবীণতম অধ্যাপক, টি. ডি. বি. কলেজ, রাণীগঞ্জ, বর্ধমান।

ও

শ্রীঅলকনাথ হালদার, এম. এ., বি. টি.
গণিত শিক্ষক, সিহাড়শোল রাজ উচ্চতর বিদ্যালয়, রাণীগঞ্জ, বর্ধমান।

GRANTHA TIRTHA · CALCUTTA ·
গ্রন্থতীর্থ
ফোন: ৩৪-২৬৪০
প্রকাশক ও পুস্তক বিক্রেতা
৬৫/৩এ, কলেজ স্ট্রীট • কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রকাশক ঃ
এস. বি. নায়ক
৬৫/৩এ, কলেজ ষ্ট্রীট্,
কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রথম মুদ্রণ ঃ আগষ্ট, ১৯৭৬
দ্বিতীয় মুদ্রণ ঃ অক্টোবর, ১৯৭৮
তৃতীয় মুদ্রণ ঃ জুন, ১৯৭৯

মূল্য ঃ বারো টাকা মাত্র।

মুদ্রাকর ঃ
শ্রীনেপালচন্দ্র ঘোষ
বঙ্গবাণী প্রিণ্টার্স
৫৭/এ, কারবালা ট্যাঙ্ক লেন,
কলিকাতা-৭০০০০৬

সূচীপত্র (Contents)

প্রথম অধ্যায়

আয়ত কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

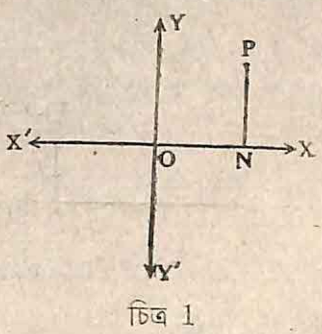
(Rectangular Cartesian Co-ordinates)

1·1. স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে (**Co-ordinate Geometry**) বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতির আলোচনা করা হয়।

কোন সমতলে একটি বিন্দুর অবস্থান বুঝাইবার জন্য এক জোড়া বাস্তব সংখ্যা লওয়া হয়। ঐ বাস্তব সংখ্যাদ্বয়কে ঐ বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** বলা হয়। এই স্থানাঙ্ক অর্থাৎ উল্লিখিত সংখ্যাদ্বয় জানা থাকিলে সমতলে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

সমতলে কোন বিন্দু যদি নির্দিষ্ট সর্ত বা নিয়ম মানিয়া চলিতে থাকে, তাহা হইলে সে যে পথে চলে, তাহাকে উহার সঞ্চার পথ (locus) বলা হয়। এক্ষেত্রে চলমান বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয়ের মধ্যে একটি নির্দিষ্ট সম্পর্ক থাকে এবং এই সম্পর্ককে একটি বীজগণিতীয় সমীকরণের রূপ দান করিয়া ঐ পথের বিভিন্ন ধর্ম আমরা বীজগণিতের সাহায্যে আলোচনা করিতে পারি। বীজগণিতের সাহায্যে আলোচনা করিতে পারা যায় বলিয়াই স্থানাঙ্ক জ্যামিতির আর এক নাম **বিশ্লেষণাত্মক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি** (**Analytical Co-ordinate Geometry**)।

1·2. আয়ত কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (**Rectangular Cartesian Co-ordinates**) : মনে কর, $\overleftrightarrow{X'OX}$ ও $\overleftrightarrow{X'OY}$ দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $\overleftrightarrow{X'OX}$ সরলরেখাকে Y-**অক্ষ** (axis of X) এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ সরলরেখাকে Y-**অক্ষ** (axis of Y) বলা হয় এবং O বিন্দুকে বলা হয় **মূলবিন্দু** (origin)। অক্ষদ্বয় উহাদের সমতলকে চারিটি অংশে বিভক্ত করে। প্রতি অংশকে বলে **পাদ** (Quadrant) XOY অংশকে বলা হয় প্রথম পাদ (first quadrant) ; YOX′, X′OY′ এবং Y′OX অংশগুলিকে যথাক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পাদ (second, third and fourth quadrants) বলা হয়।



চিত্র 1

মনে কর, P ঐ সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দু। P বিন্দু হইতে X-অক্ষের উপর PN লম্ব অঙ্কন কর। এখন $\overline{ON}$ এবং $\overline{NP}$ দৈর্ঘ্যদ্বয় জানা থাকিলেই P বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যাইবে। এই দৈর্ঘ্যদ্বয়ের সূচক সংখ্যাদ্বয়কে P বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** (co-ordinates) বলা হয়। মনে কর $\overline{ON}=x$ একক, ও $\overline{NP}=y$ একক; তাহা হইলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল (x, y) এবং এখন হইতে Pকে আমরা (x, y) বিন্দু বলিয়া উল্লেখ করিতে পারিব। x-কে বলা হয় P বিন্দুর **ভুজ** বা **X-স্থানাঙ্ক** (abscissa বা X-co-ordinate) এবং y-কে বলা হয় P বিন্দুর **কোটি** বা **Y স্থানাঙ্ক** (ordinate বা Y co-ordinate)।

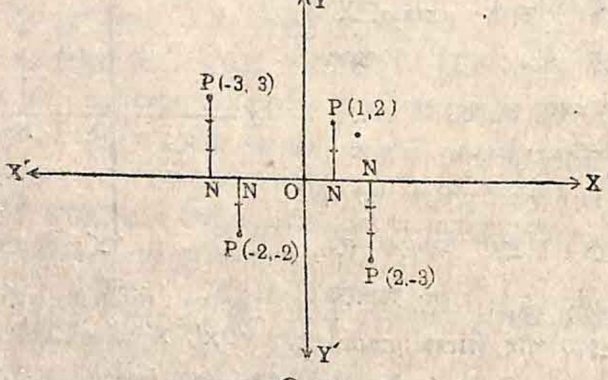
উপরের আলোচনা হইতে ইহা স্পষ্ট যে, (x, y) বিন্দু বা (x, y) বলিলে x ও y অক্ষদ্বয়ের সমতলে অবস্থিত এমন বিন্দু বুঝিতে হইবে যাহার ভুজ x-একক দীর্ঘ এবং কোটি y-একক দীর্ঘ।

কোন বিন্দুর অবস্থান উহার স্থানাঙ্ক দ্বারা বুঝাইতে হইলে, প্রথমে ভুজ বা x স্থানাঙ্ক এবং পরে কোটি বা y স্থানাঙ্কের উল্লেখ করা হয়।

1·3. ফরাসী গণিতবিদ এবং দার্শনিক **দে কার্তে** (Des Cartes) এই স্থানাঙ্ক জ্যামিতির আবিষ্কর্তা বলিয়া তাঁহার নামানুসারে ইহাকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (Cartesian Co-ordinate Geometry) বলা হয় এবং কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Cartesian Co-ordinates) বলা হয়।

1·4. স্থানাঙ্কের চিহ্ন (Signs of Co-ordinates):

কেবলমাত্র $\overline{ON}$ এবং $\overline{NP}$ দৈর্ঘ্যদ্বয়ের সূচক সংখ্যা জানিলেই P বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায় না। $\overline{ON}$ দূরত্ব O হইতে $\overline{OX}$ বরাবর কিংবা $\overline{OX'}$ বরাবর হইবে



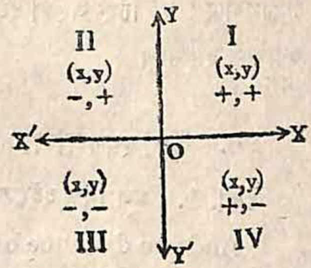
চিত্র 2

তাহা স্থির করিতে হইবে x-স্থানাঙ্কের সহিত যুক্ত চিহ্নের দ্বারা। যদি এই **চিহ্ন**

+ হয়, তবে $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OY}$ এর দিকে এবং চিহ্ন − হইলে $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OY'}$ এর দিকে হইবে।

আবার y স্থানাঙ্ক, + চিহ্ন-যুক্ত হইলে $\overline{NP}$, $\overleftrightarrow{X'OX}$ এর উপরের দিকে এবং উহা, − চিহ্ন-যুক্ত হইলে, $\overline{NP}$, $\overleftrightarrow{X'OX}$ এর নীচের দিকে হইবে।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক চারিটি বিভিন্ন রকম যথা (1, 2), (−3, 3) (−2, −2) এবং (2, −3) হইলে, উহার অবস্থান কিরূপ হইবে, তাহা পূর্বপৃষ্ঠার চিত্রে বুঝা যাইবে।



চিত্র 3

বিন্দু কোন্ পাদে অবস্থিত হইলে উহার স্থানাঙ্কের চিহ্ন কিরূপ হইবে, তাহা পার্শ্বের চিত্রের দ্বারা সহজে মনে রাখা সম্ভব।

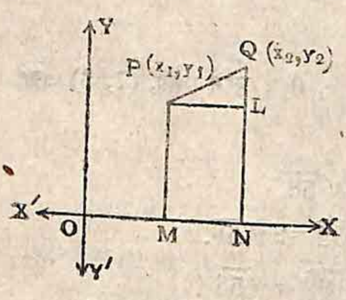
দ্রষ্টব্য। মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$; x-অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, o) এবং y-অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (o, y) লওয়া যাইতে পারে।

1·5. দুইটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব (Distance between two points)

দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে; উহাদের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the distance between two points whose co-ordinates are given.]

মনে কর P এবং Q দুইটি প্রদত্ত বিন্দু এবং উহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)। P এবং Q হইতে x অক্ষের উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ এবং $\overline{QN}$ লম্ব অঙ্কন কর এবং P হইতে $\overline{QN}$ এর উপর $\overline{PL}$ লম্ব অঙ্কন কর।



চিত্র 4

তাহা হইলে,

$$\overline{PL} = \overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM}$$
$$= x_2 - x_1 ;$$
$$\overline{LQ} = \overline{NQ} - \overline{NL} = \overline{NQ} - \overline{MP}$$
$$= y_2 - y_1$$

এখন, $\overline{PQ}^2 = \overline{PL}^2 + \overline{LQ}^2$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। মূলবিন্দু অর্থাৎ (0, 0) হইতে কোন বিন্দু P (x, y)-এর দূরত্ব হইবে $\sqrt{x^2+y^2}$.

দ্রষ্টব্য। $\overline{PQ}^2$ এর মান হইতে $\overline{PQ}$-এর মান নির্ণয় করিবার সময় ডানদিকে কেবলমাত্র '+' চিহ্ন লওয়া হইয়াছে ; কারণ, $\overline{PQ}$ হইল একটি দূরত্ব এবং দূরত্ব ঋণাত্মক হয় না।

1·6. উদাহরণমালা।

উদা. 1. মূল বিন্দু হইতে $(-5, -12)$ বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

[Find the distance of $(-5, -12)$ from the origin.]

নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$.

উদা. 2. (3, 5) ও $(-1, 8)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

[Find the distance between the points (3, 5) and $(-1, 8)$.]

নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(5-8)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

দ্রষ্টব্য। এখানে সূত্র হইল $\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ উপরের সমাধানে (3, 5) কে (x_2, y_2) এবং $(-1, 8)$ কে (x_1, y_1) মনে করা হইয়াছে। দুইটি বিন্দুর যে কোনটিকে (x_2, y_2) ধরিয়া সমাধান করা যাইবে।

উদা. 3. দেখাও যে (7, 3) ও (14, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখা মূলবিন্দু দিয়া যায়।

[Show that the line joining the points (7, 3) and (14, 6) passes through the origin.]

আমরা জানি, মূলবিন্দু O এর স্থানাঙ্ক $(c, 0)$; মনে কর, (7, 3) এবং (14, 6) বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে, P ও Q.

এখন, $\overline{OP}=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$.

$\overline{OQ}=\sqrt{14^2+6^2}=\sqrt{196+36}=\sqrt{232}=2\sqrt{58}$.

$\overline{PQ}=\sqrt{(14-7)^2+(6-3)^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$.

$\therefore\ \overline{OP}+\overline{PQ}=\sqrt{58}+\sqrt{58}=2\sqrt{58}=\overline{OQ}$.

সুতরাং, O, P, Q একই সরল রেখায় অবস্থিত।

দ্রষ্টব্য। $\overline{OP}+\overline{PQ}=\overline{OQ}$ হইলে O, P ও Q একই সরল রেখায় অবস্থিত হইবে। তাহা না হইলে OPQ একটি ত্রিভুজ হইবে এবং উহার $\overline{OP}+\overline{PQ}=\overline{OQ}$, ইহা অসম্ভব।

উদা. 4. দেখাও যে (4, 2), (7, 5) ও (9, 7) বিন্দুত্রয় সমরেখ।

[Show that the three points (4, 2), (7, 5) and (9, 7) lie on a right line.]

মনে কর, বিন্দুত্রয় যথাক্রমে P, Q ও R.

তাহা হইলে, $\overline{PQ}=\sqrt{(4-7)^2+(2-5)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}.$

$\overline{QR}=\sqrt{(7-9)^2+(5-7)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}.$

$\overline{PR}=\sqrt{(4-9)^2+(2-7)^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}.$

এখন, $\overline{PQ}+\overline{QR}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}=\overline{PR}.$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় সমরেখ।

উদা. 5. দেখাও যে (7, 2), (3, 5) ও (3, 2) বিন্দুগুলি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটি সমকোণী।

[Show that the points (7, 2), (3, 5) and (3, 2) form a right angled triangle.]

মনে কর, বিন্দুত্রয় যথাক্রমে P, Q ও R.

তাহা হইলে, $\overline{PQ}=\sqrt{(7-3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$

$\overline{QR}=\sqrt{(3-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{0+9}=\sqrt{9}=3.$

$\overline{PR}=\sqrt{(7-3)^2+(2-2)^2}=\sqrt{16+0}=\sqrt{16}=4.$

এখন $\overline{QR}^2+\overline{PR}^2=3^2+4^2=9+16=25=5^2=\overline{PQ}^2$

$\therefore$ PQR ত্রিভুজটি সমকোণী।

উদা. 6. (3, 3), (10, 4) এবং (2, 10) বিন্দুগুলি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the centre of the circle circumscribing the triangle whose vertices are (3, 3), (10, 4) and (2, 10).]

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র উহার শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে সমদূরবর্তী।

মনে কর, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (x, y).

তাহা হইলে,

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-10)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2}$$

ইহা হইতে পাওয়া যায়,

$$(x-3)^2+(y-3)^2=(x-10)^2+(y-4)^2 \quad \cdots \quad \cdots \text{(i)}$$

এবং $(x-10)^2+(y-4)^2=(x-2)^2+(y-10)^2 \quad \cdots \quad \cdots$ (ii)

(i) হইতে পাওয়া যায়, $7x+y=49 \quad \cdots \quad \cdots$ (iii)

(ii) হইতে পাওয়া যায়, $4x-3y=3 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$ (iv)

(iii) এবং (iv) সমীকরণদ্বয়কে সমাধান করিয়া পাওয়া যায়,

$x=6$ এবং $y=7$.

$\therefore$ নির্ণেয় পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (6, 7).

প্রশ্নমালা (Exercise)—1A

1. মূলবিন্দু হইতে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় কর:—

[Find the distance of the following points from the origin]:—

(i) (3, 4); (ii) (12, 5); (iii) $(-6, 8)$; (iv) $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$.

2. নিম্নে প্রদত্ত প্রত্যেক বিন্দুযুগলের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর:—

[Find the distance between the following pairs of points]:—

(i) (7, 5), $(-5, 0)$; (ii) (2, 3), $(-2, 6)$; (iii) (5, 2), (2, 3), (iv) $(4, -7)$, $(-1, 5)$; (v) $(m, 0)$, $(0, n)$; (vi) $(a, -b)$, $(-a, b)$; (vii) $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(\sin\theta, \cos\theta)$.

3. দেখাও যে নিম্নের প্রতি জোড়া বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দুগামী।

[Show that the line joining the following pairs of points passes through the origin].

(i) (3, 2), $(-6, -4)$, (ii) (3, 5), (6, 10), (iii) $(-1, 3)$, $(-5, 15)$, (iv) $(-1, -2)$, $(-3, -6)$.

4. দেখাও যে, $(0, 2), (3, 1)$ ও $(-3, 3)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

[Show that the three points $(0, 2), (3, 1)$ and $(-3, 3)$ lie on a right line].

5. দেখাও যে নিম্নের প্রতিটি ক্ষেত্রেই বিন্দুত্রয় সমরেখ।

[Show that in each of the following cases the three points are collinear].

(i) $(3, 1), (5, -5)$ ও $(-1, 13)$.

(ii) $(3a, 0), (0, 3b)$ ও $(a, 2b)$.

(iii) $(m, n+p), (n, p+m), (p, m+n)$.

6. দেখাও যে, $(-3, 2)$ ও $(6, -4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা $(9, -6)$ বিন্দু দিয়া যাইবে।

[Show that the line joining the points $(-3, 2)$ and $(6, -4)$ passes through the point $(9, -6)$].

7. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, -2)$, $(4, 2)$ এবং $(-1, 3)$ তাহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the lengths of the sides of the triangle whose vertices are $(2, -2)$ $(4, 2)$ and $(-1, 3)$]

8. দেখাও যে, $(3, 1)$, $(1, 3)$ ও $(8, 8)$ বিন্দুত্রয় একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

[Show that $(3, 1)$, $(1, 3)$ and $(8, 8)$ are the vertices of an isosceles triangle.]

9 দেখাও যে, (a, a) $(-a, -a)$, ও $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

[Show that (a, a), $(-a, -a)$ and $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ are the vertices of an equilateral triangle].

10. $(-1, 6), (3, 2)$ ও $(7, 6)$ বিন্দুগুলির মধ্য দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the centre of the circle which passes through the points $(-1, 6)$, $(3, 2)$ and $(7, 6)$].

11. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $(1, 5)$, $(7, -13)$ ও $(17, -3)$, উহার পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the centre of the circle circumscribing the triangle whose vertices are $(1, 5)$, $(7, -13)$ and $(17, -3)$].

12. (x, y) বিন্দুটি $(-2, -3)$ ও $(4, 1)$ বিন্দুত্রয় হইতে সমদূরবর্তী হইবার সর্ত নির্ণয় কর।

[Find the condition that the point (x, y) may be equidistant from the points $(-2, -3)$ and $(4, 1)$.]

13. প্রমাণ কর যে, $(3, 0)$, $(6, 4)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দুত্রয় সংযুক্ত করিলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে।

[Prove that the points $(3, 0)$, $(6, 4)$ and $(-1, 3)$ form a right-angled triangle].

14. দেখাও যে $(2a, 4a)$, $(2a, 6a)$ এবং $(2a+\sqrt{3}a, 5a)$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু যাহার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য $2a$.

[Show that this points $(2a, 4a,)$, $(2a, 6a)$ and $(2a+\sqrt{3}a, 5a)$ are the vertices of an equilateral triangle whose side is $2a$.]

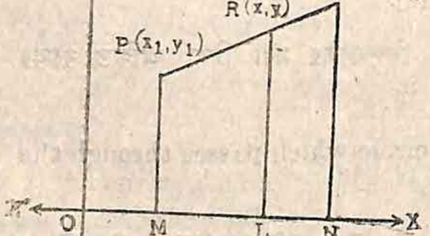
1·7. সীমায়িত সরলরেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ (Section of a finite straight line in a given ratio.)

I. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে যে বিন্দু $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the co-ordinates of the point which divides the line joining the points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) internally in the ratio $m : n$.]

মনে কর, P এবং Q বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এবং R, $\overline{PQ}$ কে এমনভাবে অন্তর্বিভক্ত করে যাহাতে $\overline{PR}$ এবং $\overline{RQ}$ এর অনুপাত হয়,

$$m : n.$$



চিত্র 5

মনে কর, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

P, Q ও R হইতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$, $\overline{QN}$ এবং $\overline{RL}$ লম্ব অঙ্কন কর।

তাহা হইলে,

$$\overline{ML} = x - x_1$$

$$\overline{LN} = x_2 - x$$

এখন যেহেতু $\overline{MP}$, $\overline{NQ}$ ও $\overline{LR}$ সমান্তরাল সরলরেখাত্রয় $\overline{PQ}$ ও $\overline{MN}$ রেখাংশদ্বয়কে একই অনুপাতে বিভক্ত করে,

সুতরাং, $\dfrac{m}{n}=\dfrac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}=\dfrac{\overline{ML}}{\overline{LN}}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$

$\therefore\ mx_2-mx=nx-nx_1$

বা, $(m+n)x=mx_2+nx_1$

$$\therefore\ x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\ \cdots\ \cdots\ (1)$$

অনুরূপে P, Q ও R হইতে y-অক্ষের উপর লম্ব অঙ্কন করিয়া দেখান যায় যে,

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}\ \cdots\ \cdots\ (2)$$

$\therefore$ R এর স্থানাঙ্ক হইল, $\left(\dfrac{\mathbf{mx_2+nx_1}}{\mathbf{m+n}},\ \dfrac{\mathbf{my_2+ny_1}}{\mathbf{m+n}}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত। R যদি $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দু হয় তবে $\dfrac{m}{n}=1$, বা, $m=n$,

এখন $m=n$, R এর স্থানাঙ্কে বসাইয়া আমরা **মধ্য বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাই,**
$\left(\dfrac{\mathbf{x_1+x_2}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{y_1+y_2}}{\mathbf{2}}\right)$

II. $(x_1,\ y_1)$ এবং $(x_2,\ y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে যে বিন্দু $m:n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the co-ordinates of the point which divides the line joining the points $(x_1,\ y_1)$ and $(x_2,\ y_2)$ externally in the ratio $m:n$].

এখানে, $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}=\dfrac{m}{n}$

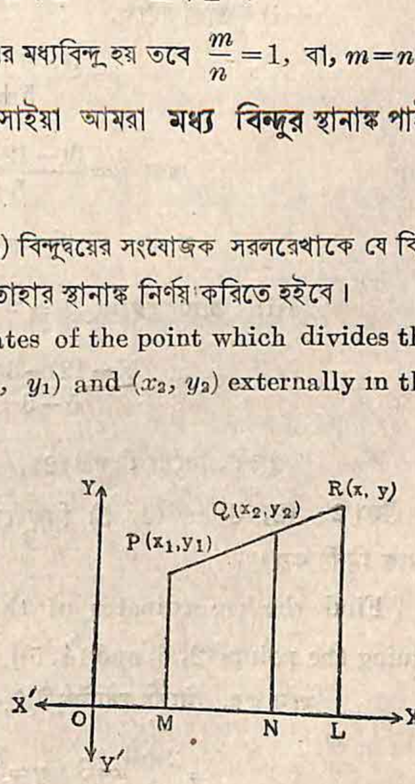
এখন $\overline{ML}=x-x_1$,

$\overline{NL}=x-x_2$.

$\therefore\ \dfrac{m}{n}=\dfrac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}$

$=\dfrac{\overline{ML}}{\overline{NL}}=\dfrac{x-x_1}{x-x_2}$.

$\therefore\ x=\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$;



চিত্র 6

এবং অনুরূপে, $y=\dfrac{my_2-ny_1}{m-n}$

সুতরাং, R এর স্থানাঙ্ক হইল, $\left(\dfrac{\mathbf{mx_2-nx_1}}{\mathbf{m-n}},\ \dfrac{\mathbf{my_2-ny_1}}{\mathbf{m-n}}\right)$

1·8. উদাহরণমালা।

উদা. 1. (1, 4) ও (9, −12) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে **5 : 3** অনুপাতে (i) অন্তর্বিভক্ত, (ii) বহির্বিভক্ত হইয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[**Find** the co-ordinates of the point which divides the line joining the points (1, 4) and (9, −12) in the ratio 5 : 3 (i) internally (ii) externally.]

মনে কর, নির্ণেয় বিন্দুটি (x, y) ;

(i) তাহা হইলে,

$$x=\frac{5\times9+3\times1}{5+3}=6,$$

$$\text{এবং } y=\frac{5(-12)+3\times4}{5+3}=-6.$$

সুতরাং. নির্ণেয় বিন্দুটি (6, −6).

(ii) তাহা হইলে, $x=\dfrac{5\times9-3\times1}{5-3}=21,$

$$\text{এবং } y=\frac{5(-12)-3\times4}{5-3}=-36.$$

সুতরাং নির্ণেয় বিন্দুটি (21, −36).

উদা 2. (2, 3) ও (4, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[**Find** the co-ordinates of the middle point of the line joining the points (2, 3) and (4, 5)].

মনে কর, নির্ণেয় মধ্যবিন্দুটি (x, y) ;

$$\therefore\ x=\frac{2+4}{2}=3\ ;\ y=\frac{3+5}{2}=4.$$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4),

উদা. 3. দেখাও যে, $(-4, -2)$, $(2, 0)$, $(8, 6)$ ও $(2, 4)$ বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

[Show that the four points $(-4, -2)$, $(2, 0)$, $(8, 6)$ and $(2, 4)$ are the angular points of a parallelogram.]

মনে কর, A $(-4, -2)$, B $(2, 0)$, C $(8, 6)$ এবং D $(2, 4)$ বিন্দুগুলি চতুর্ভুজটির কৌণিক বিন্দু।

আরও মনে কর, AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্য বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2).

তাহা হইলে, $x_1 = \frac{-4+8}{2} = 2$; $y_1 = \frac{-2+6}{2} = 2$,

এবং $x_2 = \frac{2+2}{2} = 2$, $y_2 = \frac{0+4}{2} = 2$.

$\therefore$ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় একই বিন্দু।

$\therefore$ $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

উদা. 4. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3), তাহার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[**Find the co-ordinates of the centroid of the triangle whose vertices are (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3).**]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) এবং C (x_3, y_3) এবং $\overline{BC}$ এর মধ্যবিন্দু D. তাহা হইলে D এর স্থানাঙ্ক,

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

G ভরকেন্দ্র হইলে উহা $\overline{AD}$ মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করিবে।

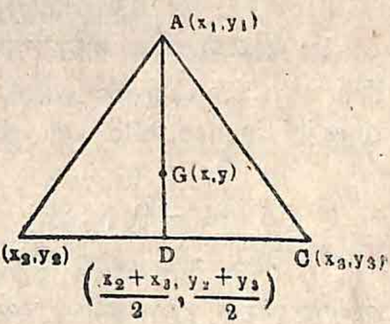
মনে কর G এর স্থানাঙ্ক (x, y).

তাহা হইলে $x = \dfrac{2.\frac{x_2+x_3}{2} + 1.x_1}{2+1}$

$= \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$

এবং $y = \dfrac{2.\frac{y_2+y_3}{2} + 1.y_1}{2+1}$

$= \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$



চিত্র 7

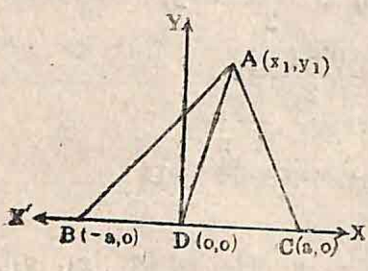
$\therefore$ ভরকেন্দ্রের নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল, $\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\}$.

দ্রষ্টব্য। উপরে প্রাপ্ত ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক সূত্র হিসাবে প্রয়োগ করা যাইবে।

উদা. 5. ABC ত্রিভুজে $\overline{BC}$ এর মধ্যবিন্দু D. স্থানাঙ্কের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$.

[If D be the middle point of the side BC of the triangle ABC, prove analytically that $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$.]

$\overleftrightarrow{BDC}$ রেখাকে x-অক্ষ এবং D বিন্দুকে মূলবিন্দু লও। $\overleftrightarrow{BDC}$ রেখার উপর D বিন্দুতে অঙ্কিত লম্বকে মনে কর y-অক্ষ।



চিত্র ৪

মনে কর, BC এর দৈর্ঘ্য $=2a$. তাহা হইলে, B বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে, $(-a, 0)$ এবং C বিন্দুর $(a, 0)$.

মনে কর, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1).

এখন, $\overline{AB}^2=(x_1+a)^2+y_1^2$

$=x_1^2+y_1^2+2ax_1+a^2$

$\overline{AC}^2=(x_1-a)^2+y_1^2=x_1^2+y_1^2-2ax_1+a^2$.

$\overline{AD}^2=x_1^2+y_1^2$; $\overline{BD}^2=a^2$.

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(x_1^2+y_1^2)+2a^2=2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2$

$=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$.

প্রশ্নমালা (Exercise)—1B

1. নিম্নের প্রতি জোড়া বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [Find the co-ordinates of the middle points of the lines joining the following pairs of points.]

(i) $(5, 7), (3, -1)$ (ii) $(9, 2), (3, 6)$

(iii) $(4, -4), (0, 8)$ (iv) $(m, n), (-m, -n)$.

2. নিম্নের প্রতি জোড়া বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্ত, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—

[Find the co-ordinates of the points which divide the st. lines joining the following pairs of points in the given ratio] :—

(i) (3, 2), (6, 5), অনুপাত (ratio) 2 : 1 অন্তস্থভাবে (internally)

(ii) (1, 2), (7, 5), অনুপাত (ratio) 1 : 2 অন্তস্থভাবে (internally)

(iii) (−1, 2), (4, −5) অনুপাত (ratio) 2 : 3 বহিস্থভাবে (externally)

(iv) (1, 3), (2, 7) অনুপাত (ratio) 3 : 4 বহিস্থভাবে (externally)

3. (4, 6) এবং (10, 12) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে (6,8) যে অনুপাতে বিভক্ত করে, তাহা নির্ণয় কর।

[Find the ratio in which the point (6, 8) divides the st. line joining the points (4, 6) and (10, 12).]

4. (10, 1) এবং (4, 8) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে (28, −20) যে অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে, তাহা নির্ণয় কর।

[Find the ratio in which the point (28, −20) divides the st. line joining the points (10, 1) and (4, 8) externally.]

5. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি (4, 1), (3, −2) এবং (−4, —5), উহার শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The middle points of the sides of a triangle are (4, 1) (3, −2) and (−4, −5). Find the vertices of the triangle.]

6. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক (4, 1), (3,4) এবং (5, 4) উহার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the co-ordinates of the centroid of the triangle whose vertices are (4, 1), (3, 4) and (5, 4)].

7. একটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (1, 4) এবং উহার দুইটি শীর্ষবিন্দু (4, −3) ও (−9, 7) ; উহার অপর শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর।

[If the centroid of a triangle is (1, 4) and two of its vertices are (4, −3) and (−9, 7), find the other vertex.]

8. দেখাও যে, (10, 6), (11, 3) (8, −10) এবং (7, −7) বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

[Show that the points (10, 6), (11, 3), (8,—10) and (7,—7) are the angular points of a parallelogram.]

9. (−2, 3) ও (3, −1) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর এবং (−2, 3) এর নিকটতর উহার সমত্রিখণ্ডক বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the distance between $(-2, 3)$ and $(3, -1)$ and the co-ordinates of the point of trisection that is nearer to $(-2, 3)$.]

10 (a, b) ও $(4a, 4b)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the points of trisection of the st. line joining the points (a, b) and $(4a, 4b)$.]

11. স্থানাঙ্কের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

[Prove analytically, that the medians of a triangle are concurrent.]

12. স্থানাঙ্কের সাহায্যে দেখাও যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

[Show that the st. line joining the middle points of two sides of a triangle is equal to half the third side.]

13. যদি (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) ও (α_4, β_4) বিন্দুগুলি ক্রমান্বয়ে যোগের দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্রটি সামান্তরিক হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4 \text{ এবং } \beta_1+\beta_3=\beta_2+\beta_4$$

[If the figure formed by joining the four points (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) and (α_4, β_4) taken in order, be a parallelogram, then prove that $\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4$ and $\beta_1+\beta_3=\beta_2+\beta_4$]

14. A $(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ ও B $(a\cos\beta, a\sin\beta)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে M (x, y) পর্যন্ত বর্ধিত করায় $\overline{AM}$ ও $\overline{BM}$ এর অনুপাত $b : a$ হইল। প্রমাণ কর যে, $x+y\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$.

[The line joining A $(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ and B $(a\cos\beta, a\sin\beta)$ is produced to the point M (x, y) so that $\overline{AM}$ and $\overline{BM}$ are in the ratio $b : a$. Prove that

$$x+y\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=0 \quad]$$

15 A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) এবং C (x_3, y_3) কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং a, b, c যথাক্রমে A, B ও C এর বিপরীত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য হইলে, দেখাও যে, অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$.

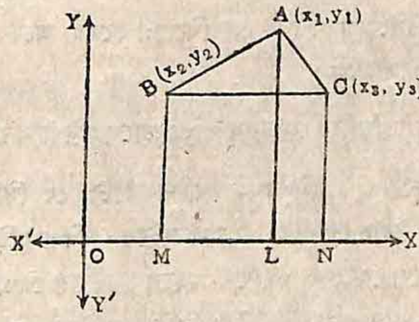
[Show that the co-ordinates of the in-centre of the triangle whose vertices are A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) and C$(x_3\ y_3)$ are $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$ where a, b, c are the sides opposite to the vertices A, B and C **respectively].**

19. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a triangle)

ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে ; উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the area of the triangle, having given the co-ordinates of its angular points.]

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং উহার শীর্ষ বিন্দুত্রয় A, B ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3).



চিত্র 9

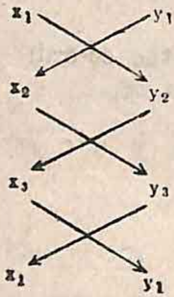
x-অক্ষ (OX) এর উপর $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ এবং $\overline{CN}$ লম্ব অঙ্কন কর। এখন, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\triangle$ দ্বারা সূচিত করিলে,

$$\Delta = \text{ট্রাপিজিয়ম ABML} + \text{ট্রাপিজিয়ম ALNC} - \text{ট্রাপিজিয়ম BMNC}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\overline{MB}+\overline{LA})\,\overline{ML} + \tfrac{1}{2}(\overline{LA}+\overline{NC})\,\overline{LN} - \tfrac{1}{2}(\overline{MB}+\overline{NC})\,\overline{MN}$$
$$= \tfrac{1}{2}[(y_2+y_1)(x_1-x_2) + \tfrac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)$$
$$- \tfrac{1}{3}(y_2+y_3)(x_3-x_2)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$$
$$= \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\}.$$

টীকা. 1. ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি) $\times$ (ঐ বাহুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব)।

টীকা 2 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্রটি সহজে মনে রাখিবার জন্য নিম্নের নিয়মটি বিশেষ সুবিধাজনক।

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির ভুজগুলি এক স্তম্ভে নীচে নীচে লেখ এবং কোটিগুলি পাশাপাশি আর এক স্তম্ভে পূর্বের মত নীচে নীচে লেখ। এইবার সর্বোচ্চ সারির



চিত্র 10

অর্থাৎ প্রথম সারির স্থানাঙ্কদ্বয় পুনরায় সর্বনিম্ন সারিতে (পার্শ্ব চিত্র দেখ) লেখ। এখন প্রথম হইতে আরম্ভ করিয়া প্রত্যেক ভুজকে পরবর্তী সারির কোটির সহিত গুণ কর (তীর নির্দিষ্টভাবে)। আবার অনুরূপ ভাবে প্রত্যেক কোটিকে পরবর্তী সারির ভুজের সহিত গুণ কর। এইবার প্রথম গুণফলগুলির সমষ্টি হইতে দ্বিতীয় গুণফলগুলির সমষ্টি বিয়োগ কর। এই বিয়োগ ফলের অর্ধেক হইবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল।

চতুর্ভূজ, পঞ্চভুজ প্রভৃতির ক্ষেত্রফলও এইভাবে নির্ণয় করা যায়।

টীকা. 3. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত ক্রমে লইলে উহার ক্ষেত্রফল ধনাত্মক হইবে ; কিন্তু ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই ক্রমে লইলে ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হইবে। কিন্তু ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয় না। সুতরাং, ক্ষেত্রফল ধনাত্মক চিহ্ন-বিশিষ্ট করিবার জন্য প্রথম হইতেই রাশিমালাটির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া লওয়া যাইতে পারে, অথবা ঋণাত্মক ক্ষেত্রফল পাইলে উত্তর লিখিবার সময় বা ঐ ফল কোথাও প্রয়োগ করিবার সময় ধনাত্মক ধরিয়া লওয়া যাইতে পারে।

1·10. তিনটি বিন্দু সমরেখ হইবার সর্ত [Condition for collinearity of three points].

তিনটি বিন্দু দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য (0) হইলে, বিন্দু তিনটি সমরেখ হইবে।

সুতরাং, নির্ণেয় সর্ত হইল,

$$\tfrac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}=0$$

1·11. উদাহরণমালা।

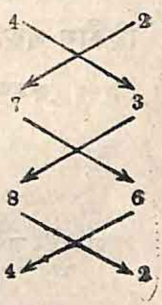
উদা. 1. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক (4, 2), (7, 3), ও (8, 6) তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find the area of the triangle whose vertices are (4, 2), (7, 3) and (8, 6).]

$$\begin{aligned}\triangle &= \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}\\ &= \tfrac{1}{2}\{4(3-6)+7(6-2)+8(2-3)\}\\ &= \tfrac{1}{2}(-12+28-8)=4.\end{aligned}$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি

$$\begin{aligned}\triangle &= \tfrac{1}{2}\{(4\times 3+7\times 6+8\times 2)-(2\times 7+3\times 8\\ &\qquad\qquad +6\times 4)\}\\ &= \tfrac{1}{2}\{(12+42+16)-(14+24+24)\\ &= \tfrac{1}{2}(70-62)\\ &= \tfrac{1}{2}\times 8=4.\end{aligned}$$



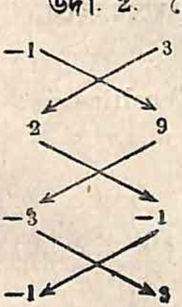
চিত্র 11

উদা. 2. দেখাও যে, (−1, 3), (2, 9) ও (−3, −1) বিন্দুত্রয় সমরেখ।

[Show that the points (−1, 3), (2, 9) and (−3, −1) are collinear.]

$$\begin{aligned}\triangle &= \tfrac{1}{2}\{(-9-2-9)-(6-27+1)\}\\ &= \tfrac{1}{2}(-20+20)=0.\end{aligned}$$

সুতরাং, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ।



চিত্র 12

উদা. 3. A, B, C এবং D-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) এবং (x_4, y_4) হইলে, ABCD চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

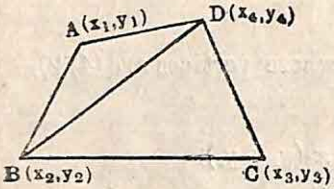
[If the co-ordinates of A, B, C and D be (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) and (x_4, y_4) respectively, find the area of the quadrilateral ABCD].

B ও D যুক্ত কর।

এখন, ABCD এর ক্ষেত্রফল$=\triangle ABD+\triangle DBC$

$$=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_4-x_4y_2+x_4y_1-x_1y_4)+\tfrac{1}{2}(x_4y_2-x_2y_4+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3)$$

$$=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3+x_4y_1-x_1y_4)$$

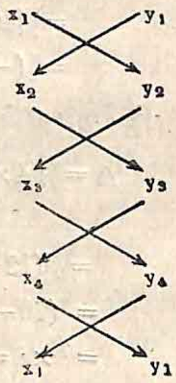


চিত্র 13

দ্বিতীয় পদ্ধতি

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল$=\tfrac{1}{2}[(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_4+y_4x_1)]$

$$=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3+x_4y_1-x_1y_4).$$



চিত্র 14

উদা. 4. (a, b), (a', b') ও $(a-a', b-b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হইলে, দেখাও যে, $ab'=a'b$.

If the points (a, b), (a', b') and $(a-a', b-b')$ collinear show that $ab'=a'b$.

যেহেতু, বিন্দুত্রয় সমরেখ,

$\therefore\ a\{b'-(b-b')\}+a'\{(b-b')-b\}+(a-a')(b-b')=0$

বা, $ab'-a'b=0$ [সরলীকরণ দ্বারা]

$\therefore\ ab'=a'b$

প্রশ্নমালা (Exercise) 1C

1. নিম্নের শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

[Find the area of the triangle whose vertices are :—]

(i) $(2, 5), (3, -4)$ ও $(8, -1)$.

(ii) $(5,7), (9,4)$ ও $(7,10)$.

(iii) $(2,-2), (4, 2),$ ও $(-1,3)$.

(iv) $(a, b+c), (b, c+a)$ ও $(c, a+b)$.

(v) $(\cos\theta, \sin\theta), (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ ও $(0,0)$.

2. দেখাও যে, নিম্নের বিন্দুত্রয় সমরেখ।

[Show that the following points are collinear.]

(i) $(2,6), (5,9),$ ও $(9,13)$.

(ii) $(2,0), (5,3)$ ও $(7,5)$.

(iii) $(3a,0)$ $(0, 3b)$ ও $(a, 2b)$.

3. নিম্নের শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

[Find the area of the quadrilateral whose vertices are :—]

(i) $(4,5), (-1,2), (6,-2)$ ও $(9,3)$.

(ii) $(1,2), (-2, 1), (2,-1)$ ও $(4, 1)$.

(iii) $(7, 2), (5, 5), (4, 9)$ ও $(1,3)$.

4. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের বাহুসমূহের মধ্যবিন্দুগুলি যোগ করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তাহার ক্ষেত্রফল মূল ত্রিভুজের এক-চতুর্থাংশ মাত্র।

[Prove that the area of the triangle formed by joining the middle points of a triangle is one-fourth of the latter.]

5. $(a, 0), (0, b)$ এবং $(1, 1)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হইলে, দেখাও যে, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.

[If the points $(a, 0)$, $(0, b)$ and $(1, 1)$ be collinear, show that, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.]

6. A, B, C ও P বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(6,3)$ $(-3,5)$, $(4,-2)$ ও (x, y) ; প্রমাণ কর যে, $\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC}=\frac{x+y-2}{7}$.

[The co-ordinates of A, B, C and P are $(6, 3)$, $(-3, 5)$ $(4,-2)$ and (x, y) respectively ; show that

$$\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC}=\frac{x+y-2}{7}$$]

7. A, B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে, $(6, 3)$, $(-3, 5)$, $(4, -2)$ ও $(x, 3x)$ এবং $\frac{\triangle DBC}{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

[The co-ordinates of A, B, C and D are respectively $(6, 3)$, $(-3,5)$, $(4, -2)$ and $(x, 3x)$ and $\frac{\triangle DBC}{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$; find x.]

8. প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করিলে উৎপন্ন চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হইবে।

[Prove that the lines joining the middle points of the sides of a quadrilateral in order form a parallelogram.]

1·12. সঞ্চার পথ ও উহার সমীকরণ (Locus and its equation) ।

পূর্বেই বলা হইয়াছে, কোন সমতলে একটি চলমান বিন্দু যদি সর্বদাই এক বা একাধিক সর্ত পালন করিয়া চলে, তবে যে পথে বিন্দুটি চলে, তাহাকে উহার **সঞ্চার পথ** (locus) বলে।

চলমান বিন্দুটি যে সর্ত মানিয়া চলে, স্থানাঙ্কের সাহায্যে ঐ সর্তকে একটি বীজগণিতীয় সমীকরণের রূপ দান করা যায়। এই সমীকরণকে বলা হয় চলমান বিন্দুর **সঞ্চারপথের সমীকরণ** (Equation of the locus).

সুতরাং, কোন সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করিবার জন্য আমরা ঐ পথের উপর **যে কোন** একটি বিন্দু লইয়া উহার স্থানাঙ্ক (x, y) বলিয়া ধরিয়া লই এবং প্রদত্ত সর্ত পূর্ণ করিবার জন্য উহাদের মধ্যে যে সম্পর্ক বিদ্যমান, তাহা নির্ণয় করি। এই সম্পর্কটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

মনে রাখিতে হইবে, **যে কোন** বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) দ্বারা সূচিত হয় এবং নির্দিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), (x_2, y_2) ইত্যাদি দ্বারা সূচিত হয়।

যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) কে বলা হয় current co-ordinates.

1·13. সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ের পদ্ধতি নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে আরও স্পষ্ট হইবে।

উদা. 1. যে চলমান বিন্দুর ভুজ ও কোটির সমষ্টি সর্বদাই 5 তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the locus of the point which moves so that the sum of its abscissa and ordinate is always equal to 5.]

মনে কর, সঞ্চারপথের উপর **যে কোন** বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

প্রদত্ত সর্তানুসারে, $x+y=5$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x+y=5$.

উদা. 2. যে চলমান বিন্দুর ভুজ সর্বদাই কোটির দ্বিগুণ, তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the locus of the point which moves so that its abscissa is always twice its ordinate]

মনে কর, সঞ্চারপথের উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

প্রদত্ত সর্তানুসারে, $x=2y$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x=2y$.

উদা 3. যে চলমান বিন্দুর, x-অক্ষ হইতে দূরত্ব, y-অক্ষ হইতে দূরত্ব অপেক্ষা বেশী, তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the locus of the point whose distance from the x-axis always exceeds its distance from the y-axis by 5.]

মনে কর, সঞ্চারপথের উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু।

তাহা হইলে, x-অক্ষ হইতে P এর দূরত্ব $=y$,

এবং y-অক্ষ হইতে P এর দূরত্ব $=x$,

সুতরাং, প্রদত্ত সর্তানুসারে, $y=x+5$;

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y=x+5$.

উদা. 4. যে চলমান বিন্দুর, (3, 5) হইতে দূরত্ব সর্বদাই 5, তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the locus of the point which moves so that its distance from the point (3, 5) is always equal to 5.]

মনে কর, সঞ্চারপথের উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু। তাহা হইলে, (3, 5) হইতে P এর দূরত্ব $=\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}$;

প্রদত্ত সর্তানুসারে, $\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=5$;

উভয়পক্ষকে বর্গ করিয়া, $x^2-6x+9+y^2-10y+25=25$,

বা, $x^2+y^2-6x-10y+9=0$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল, $x^2+y^2-6x-10y+9=0$.

উদা. 5. যে চলমান বিন্দুর, (2,0) হইতে দূরত্ব উহার y-অক্ষ হইতে দূরত্ব অপেক্ষা 2 বেশী, তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the locus of the point which moves so that its distance from the point (2, 0) always exceeds its distance from the y-axis by 2.]

মনে কর, সঞ্চারপথের উপর P (x, y) যে কোন বিন্দু।

এখন, (2,0) হইতে P এর দূরত্ব $=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

এবং y-অক্ষ হইতে P এর দূরত্ব $=x$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্তানুসারে, $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x+2$,

বা, $x^2-4x+4+y^2=x^2+4x+4$,

বা, $y^2-8x=0$, বা, $y^2=8x$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $y^2=8x$.

উদা. 6. A $(a, 0)$, B $(-a, 0)$ এবং C $(d, 0)$ তিনটি স্থির বিন্দু; যে চলমান বিন্দু P সর্বদাই, $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2\overline{PA}^2$, সর্তটি মানিয়া চলে তাহার সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[A $(a, 0)$, B $(-a, 0)$ and C $(d, 0)$ are three fixed points; find the locus of P which always fulfills the condition, $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2\overline{PA}^2$.]

মনে কর, P এর স্থানাঙ্ক (x, y)

তাহা হইলে, $\overline{PB}^2=(x+a)^2+y^2$; $\overline{PC}^2=(x-d)^2+y^2$; $\overline{PA}^2=(x-a)^2+y^2$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্তানুসারে, $(x+a)^2+y^2+(x-d)^2+y^2=2\{(x-a)^2+y^2\}$,

বা, $2ax+a^2-2dx+d^2=-4ax+2a^2$,

বা, $2(3a-d)x+d^2-a^2=0$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $2(3a-d)x+d^2-a^2=0$.

প্রশ্নমালা (Exercise) 1D

1. y-অক্ষ হইতে যে চলমান বিন্দুর দূরত্ব, উহার x-অক্ষ হইতে দূরত্বের 4 গুণ তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the locus of a point which moves so that its distance from the y-axis is always 4 times its distance from the x-axis.]

2. অক্ষদ্বয় হইতে চলমান বিন্দু P এর দূরত্বের সমষ্টি সর্বদাই 20 হইলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[If P moves so that the sum of its distances from the axes is always equal to 20 ; find the locus of P.]

3. অক্ষদ্বয় হইতে চলমান বিন্দু P এর দূরত্বের বর্গের সমষ্টি 25 হইলে; P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the locus of P which moves so that the sum of the squares of its distances from the axes is equal to 25.]

4 (3, 4) ও (5, 6) বিন্দু হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[Find the locus of a point which is always equidistant from the points (3, 4) and (5, 6).]

5. একটি চলমান বিন্দুর x-অক্ষ হইতে দূরত্ব সর্বদাই (1, 1) বিন্দু হইতে উহার দূরত্বের দ্বিগুণ হইলে, সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the locus of a point if its distance from the x-axis is double its distance from the point (1, 1).]

6. y-অক্ষ হইতে কোন চলমান বিন্দুর দূরত্ব সর্বদাই (2, 2) বিন্দু হইতে উহার দূরত্বের দ্বিগুণ হইলে, ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the locus of the point which moves so that its distance from the y-axis is always twice its distance from the point (2, 2).]

7. P ও Q বিন্দু যথাক্রমে $(-4, 0)$ ও $(-1, 0)$ এবং A এরূপ একটি চলমান বিন্দু যে, $\overline{AP} : \overline{AQ} = 2 : 1$; A বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[The points P and Q are $(-4, 0)$ and $(-1, 0)$ respectively. A point A moves so that, $\overline{AP} : \overline{AQ} = 2 : 1$; find the locus of A.]

8. (5, 12) বিন্দু হইতে একটি চলমান বিন্দুর দূরত্ব সর্বদাই 13 হইলে, উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the locus of a point which moves in such a way that its distance from (5, 12) is always equal to 13.]

9. A ও B স্থির বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 4) ও (−6, 8) এবং P এরূপ একটি চলমান বিন্দু যে △PAB এর ক্ষেত্রফল সর্বদাই 30 হয়। P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[The co-ordinates of two fixed points A and B are respectively (2, 4) and (−6, 8). A point P moves so that the area of the triangle PAB is always 30. Find the equation to the locus of P.]

10. (1, 3) ও (5, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

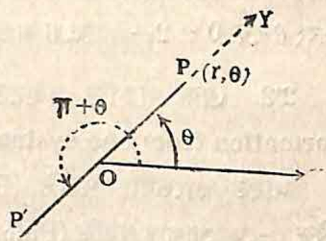
[Find the equation to the perpendicular bisector of the join of the two points (1, 3) and (5, 5).]

দ্বিতীয় অধ্যায়

পোলার স্থানাঙ্ক ; পোলার হইতে কার্তেসীয় এবং কার্তেসীয় হইতে পোলার পদ্ধতিতে রূপান্তর (Polar Co-ordinates ; Transformation from one system to another.)

2·1. কার্তেসীয় পদ্ধতি ছাড়াও, সমতলে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য আরও একটি পদ্ধতি আছে। ইহার নাম পোলার পদ্ধতি (Polar system)।

মনে কর, সমতলে O একটি স্থির বিন্দু এবং OX, O বিন্দুগামী একটি স্থির রেখা। O বিন্দুকে আমরা বলিব **মূলবিন্দু** বা **পোল** (Origin or Pole) এবং OX রেখাকে বলিব **প্রাথমিক রেখা** (Initial line)। সমতলে অপর যে কোন বিন্দু P লও এবং OP যুক্ত কর। এইবার ∠XOP এবং OP-এর দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে P′ বিন্দুর অবস্থান সুনিশ্চিতভাবে জানিতে পারা যায়। OP-কে বলা হয় P বিন্দুর **রেডিয়াস্ ভেক্টর্** (Radius Vector) এবং ∠XOP-কে বলা হয় P বিন্দুর **ভেক্টোরিয়াল কোণ** (Vectorial Angle)।



চিত্র 15

যদি ভেক্টোরিয়াল কোণ θ হয় এবং রেডিয়াস্ ভেক্টর r হয়, তবে P বিন্দুকে (r, θ) দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং (r, θ) এই পোলার স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinates) দ্বারা সূচিত বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে, প্রথমে আমরা θ-এর সমান করিয়া ∠XOY কোণ অঙ্কন করি এবং তারপর OY হইতে r-এর সমান করিয়া OP কাটিয়া লই। এইভাবে প্রাপ্ত P বিন্দুই (r, θ) বিন্দু।

θ ধনাত্মক কোণ হইলে, OX হইতে আরম্ভ করিয়া, ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া θ কোণ অঙ্কন করিতে হইবে। θ ঋণাত্মক হইলে ইহার বিপরীত করিতে হইবে।

r ধনাত্মক হইলে O হইতে ভেক্টোরিয়াল কোণের সীমারেখা (Bounding line) বরাবর r-কে মাপিতে হইবে এবং r ঋণাত্মক হইলে, O হইতে Bounding line-এর উল্টো দিক বরাবর r-কে মাপিতে হইবে।

যদি $\overline{PO}$-কে P′ পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হয় যেন $\overline{OP}=\overline{OP'}$ হয় ; তাহা হইলে, P′-এর পোলার স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinates) হইবে $(-r, \theta)$ বা $(r, \pi+\theta)$

তাহা হইলে বুঝা গেল, ভেক্টোরিয়াল কোণকে প্রয়োজনমত লইয়া যে কোন বিন্দুর রেডিয়াস ভেক্টর্ (radius vector)-কে সর্বদাই ধনাত্মক লওয়া যাইবে।

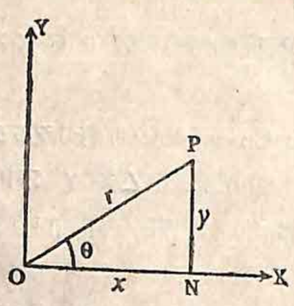
আরও লক্ষ্য কর, (r, θ) বিন্দুটিকে সাধারণভাবে $\{r, (\theta\pm 2n\pi)\}$, বা $\{-r, (\theta\pm\overline{2n+1}\pi)\}$ দ্বারা সূচিত করা যাইবে।

বিচ্ছিন্ন কয়েকটি বিন্দুর ক্ষেত্রে (অর্থাৎ যখন পোলার স্থানাঙ্কের সাহায্যে কোন সমীকরণ লইয়া আলোচনা করা হইবে না) সাধারণতঃ r-কে ধনাত্মক এবং θ-কে 0 ও 2π-এর মধ্যে লওয়া হয়।

2·2. এক পদ্ধতি হইতে অন্য পদ্ধতিতে পরিবর্তন (Transformation from one system to another.)

আয়ত কার্তেসীয় পদ্ধতি (Rectangular Cartesian System)-র মূল বিন্দু O-কে পোলার পদ্ধতি (Polar System)-এর পোল (Pole) মনে কর এবং x-অক্ষ $\overrightarrow{OX}$-কে প্রাথমিক রেখা (Initial line) মনে কর।

মনে কর, কোন বিন্দু P-এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ)। তাহা হইলে নিম্নের বাম পার্শ্বের চিত্র হইতে পাই,



চিত্র 16

$$\left.\begin{aligned} x&=\overline{ON}=r\cos\theta \\ y&=\overline{NP}=r\sin\theta \end{aligned}\right\}\cdots(i)$$

এবং
$$\left.\begin{aligned} r&=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}\cdots\cdots \\ \tan\theta&=\frac{\overline{PN}}{\overline{ON}}=\frac{y}{x}\cdots\cdots\cdots \\ \therefore\ \theta&=\tan^{-1}\frac{y}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\cdots(ii)$$

(i) নং সমীকরণদ্বয়ে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কের সাহায্যে এবং (ii) সমীকরণদ্বয়ে পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ করা হইয়াছে।

2·3. দুইটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব (Distance between two points).

মনে কর, P ও Q বিন্দুদ্বয়ের পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1) এবং (r_2, θ_2). $\overline{PQ}$-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

$\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ যুক্ত কর।

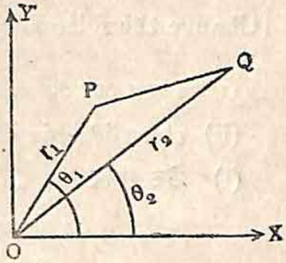
ত্রিকোণমিতি হইতে আমরা জানি,

$$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2\overline{OP}.\overline{OQ}\cos\angle POQ$$
$$=r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2).$$

সুতরাং, (r_1, θ_1) ও (r_2, θ_2) বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব d দ্বারা সূচিত হইলে,

$$\mathbf{d^2=r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}\cdots\text{(i)}$$

(i) হইতে সহজেই d-এর মান পাওয়া যায়।



চিত্র 17

2·4. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a triangle).

কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের পোলার স্থানাঙ্ক (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) এবং (r_3, θ^3) হইলে, উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the area of the triangle, the polar co-ordinates of whose angular points are (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) and (r_3, θ_3).]

মনে কর, A, B ও C-এর পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) এবং (r_3, θ_3).

চিত্র হইতে পাই, $\triangle ABC=\triangle OBC+\triangle OCA-\triangle OBA\cdots\cdots(1)$

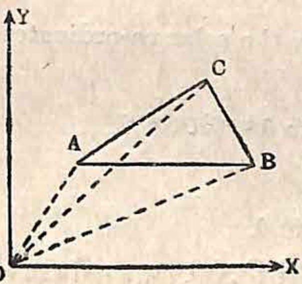
ত্রিকোণমিতি হইতে জানি, $\triangle OBC=\frac{1}{2}\overline{OB}.\overline{OC}\sin BOC$

$$=\tfrac{1}{2}r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2)$$

$$\triangle OCA=\tfrac{1}{2}\overline{OC}.\overline{OA}\sin COA$$
$$=\tfrac{1}{2}r_3r_1\sin(\theta_1-\theta_3)$$

এবং $\triangle OAB=\frac{1}{2}\overline{OA}.\overline{OB}\sin AOB$

$$=\tfrac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$=-\tfrac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1).$$



চিত্র 18

সুতরাং (1) হইতে পাই

$$\triangle ABC=\tfrac{1}{2}[\mathbf{r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2)+r_3r_1\sin(\theta_1-\theta_3)}$$
$$\mathbf{+r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)}].$$

2·5. উদাহরণমালা

উদা. 1. নিম্নের সমীকরণকে কার্তেসীয় পদ্ধতিতে পরিবর্তিত কর :—

[Change the following equation to Cartesian co-ordinates :—]

(i) $r=a\cos\theta$.

(ii) $r(\cos 3\theta+\sin 3\theta)=5k\sin\theta\cos\theta$.

(i) উভয়পক্ষকে r দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$r^2=ar\cos\theta,$$

বা, $x^2+y^2=ax$ $[\because\ r^2=x^2+y^2$ এবং $x=r\cos\theta]$

(ii) $r(\cos 3\theta+\sin 3\theta)=5k\sin\theta\cos\theta$.

বা, $r(4\cos^3\theta-3\cos\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta)=5k\sin\theta\cos\theta$,

বা, $4r(\cos^3\theta-\sin^3\theta)-3r(\cos\theta-\sin\theta)=5k\sin\theta\cos\theta$.

উভয়পক্ষকে r^2 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$4(r^3\cos^3\theta-r^3\sin^3\theta)-3r^2(r\cos\theta-r\sin\theta)$$
$$=5kr\cos\theta\cdot r\sin\theta$$

এখন, $r\cos\theta=x$, $r\sin\theta=y$ এবং $r^2=x^2+y^2$ বসাইয়া পাই,

$$4(x^3-y^3)-3(x^2+y^2)(x-y)=5kxy,$$

বা, $(x-y)(x^2+4xy+y^2)=5kxy$. ইহাই নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ।

উদা. 2. নিম্নের সমীকরণকে পোলার পদ্ধতিতে পরিবর্তিত কর :

[Change the following equation to the polar co-ordinates :—]

$$x^2-y^2=2ay.$$

প্রদত্ত সমীকরণে $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ বসাইলে পাই,

$$r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=2ar\sin\theta,$$

বা, $r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2ar\sin\theta$,

বা, $r\cos 2\theta=2a\sin\theta$, ইহাই নির্ণেয় পোলার সমীকরণ।

উদা. 3. $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ ও $\left(3a, \frac{\pi}{6}\right)$-এর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

[Find the distance between the points, $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ and $\left(3a, \frac{\pi}{6}\right)$].

এখানে, $d^2=(a)^2+(3a)^2-2a.3a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

$$=a^2+9a^2-6a^2.\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=a^2+9a^2-6a^2.\tfrac{1}{2}$$

$$=a^2+9a^2-3a^2$$

$$=7a^2$$

$\therefore\ d=\sqrt{7}a.$

অর্থাৎ নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{7}a.$

উদা. 4. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(-3, -30°)$, $(5, 150°)$ এবং $(7, 210°)$, তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find the area of the triangle whose vertices are $(-3, -30°)$, $(5, 150°)$ and $(7, 210°)$.]

এখানে, $\Delta=\frac{1}{2}[5\times 7\sin(210°-150°)+7(-3)\sin(-30°-210°)$
$+(-3)\times 5\sin(150°+30°)]$

$$=\tfrac{1}{2}[35\sin 60°-21\sin(-240°)-15\sin 180°]$$

$$=\tfrac{1}{2}[35\sin 60°-21\sin 60°-15\times 0]$$

$$\tfrac{1}{2}\times 14\sin 60°=7\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\tfrac{7}{2}\sqrt{3}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\frac{7}{2}\sqrt{3}.$

প্রশ্নমালা (Exercise)—2

1. নিম্নের সমীকরণগুলিকে কার্তেসীয় পদ্ধতিতে রূপান্তরিত কর :

[Change to Cartesian co-ordinates the equations :—]

(i) $r=a$; (ii) $r=a\sin\theta$; (iii) $\theta=\tan^{-1}m$;
(iv) $r=a\sin 2\theta$; (v) $r^2=a^2\cos 2\theta$; (vi) $r^2\sin 2\theta=2a^2$;
(vii) $r^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$.

2 নিম্নের সমীকরণগুলিকে পোলার পদ্ধতিতে রূপান্তরিত কর :—

[Change the following equations to the polar co-ordinates :—]

(i) $x^2+y^2=a^2$, (ii) $y=x \tan \alpha$; (iii) $x^2+y^2=2ax$;

(iv) $y^2(2a-x)=x^3$; (v) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

(vi) $x^2+y^2-gx-fy=0$.

3. নিম্নের প্রতি জোড়া বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর :—

[Find the distance between the following pairs of points :—]

(i) $(2, 30°)$ ও $(4, 120°)$; (ii) $(-3, 45°)$ ও $(7, 105°)$.

4. নিম্নের শীর্ষবিন্দু-বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

[Find the area of the triangle whose vertices are :—]

(i) $(1, 30°)$, $(2, 60°)$ ও $(3, 90°)$;

(ii) $\left(-a, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ ও $\left(-2a, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

5. দেখাও যে, $(0, 0)$, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ ও $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

[Show that the points $(0, 0)$, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ and $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ form an equilateral triangle.]

তৃতীয় অধ্যায়

সরল রেখা (Straight Line)

3·1. x ও y বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ সর্বদা একটি সরলরেখা প্রকাশ করে। [A first degree equation in x and y always represents a straight line.]

x ও y বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের সাধারণ রূপ হইতেছে,

$ax+by+c=0$ [a ও b উভয়েই শূন্য নহে]$\cdots$(1)

মনে কর, (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দু তিনটি $ax+by+c=0$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত। তাহা হইলে, ঐ স্থানাঙ্কগুলি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore\quad ax_1+by_1+c=0\cdots\cdots(1)$$

$$ax_2+by_2+c=0\cdots\cdots(2)$$

$$ax_3+by_3+c=0\cdots\cdots(3)$$

(1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা পাই,

$$\frac{a}{y_1-y_2}=\frac{b}{x_2-x_1}=\frac{c}{x_1y_2-x_2y_1}=k, \text{ মনে কর।}$$

$$\therefore\quad a=k(y_1-y_2)\ ;\ b=k(x_2-x_1)\ ;\ c=k(x_1y_2-x_2y_1).$$

এখন, (3)-এ, a, b, ও c-এর মান বসাইয়া পাই,

$$k\{x_3(y_1-y_2)+y_3(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1\}=0.$$

বা, $(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)=0.$

সুতরাং, (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুত্রয় সমরেখ।

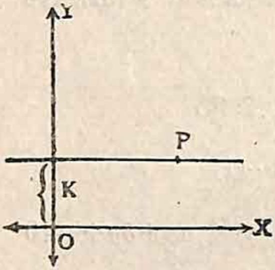
এখন যেহেতু, (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুত্রয় সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত সঞ্চারপথের উপর যে কোন তিনটি বিন্দু, সুতরাং $ax+by+c=0$ একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

দ্রষ্টব্য। সরলরেখার সমীকরণের **সাধারণ আকার $\mathbf{ax+by+c=0}$.**

3·2. অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ (Equation of lines parallel to the axes.)

(i) x- অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা হইতে k দূরত্বে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the equation of the straight line parallel to the x-axis at a distance k from it.]



চিত্র 19

সরলরেখাটির উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু লইলে, স্পষ্টতঃই P-এর কোটি $= k$

অর্থাৎ, $y = k$

সুতরাং, $\mathbf{y = k}$. সমীকরণটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

(ii) y-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা হইতে h দূরত্বে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the equation of the straight line parallel to x-axis at a distance h from it.]

সরলরেখাটির উপর যে কোন বিন্দু P-এর y-স্থানাঙ্ক যাহাই হউক না কেন, x-স্থানাঙ্ক সর্বদাই h.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\mathbf{x = h}$.

টীকা। যেহেতু, x-অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক '0', সুতরাং, x-অক্ষের সমীকরণ, $\mathbf{y = 0}$.

আবার, যেহেতু, y-অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক '0', সুতরাং উহার সমীকরণ, $\mathbf{x = 0}$.

3·3. যে সরলরেখা y-অক্ষ হইতে c অংশ ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the equation of the straight line which makes an angle θ with the positive direction of x-axis and cuts off a given intercept c from the y-axis.]

মনে কর, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা, y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করিয়া উহা হইতে $\overline{OC}$ অংশ ছিন্ন করিয়াছে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

তাহা হইলে, $\overline{OC}=c$, এবং $\angle ABX=\theta$.

মনে কর, $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y).

$\overrightarrow{OX}$-এর উপর $\overline{PN}$ এবং $\overline{PN}$-এর উপর $\overline{CL}$ লম্ব অঙ্কন কর।

তাহা হইলে, $\overline{ON}=x$, এবং $\overline{PN}=y$.

$\therefore\ \overline{PL}=\overline{PN}-\overline{LN}=\overline{PN}-\overline{OC}=y-c$,

এবং $\overline{CL}=\overline{ON}=x$,

এবং $\angle PCL=\theta$

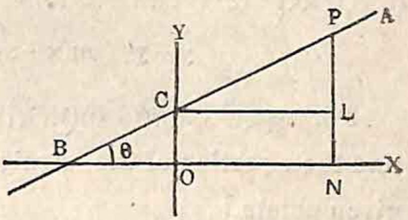
$\therefore\ \triangle PCL$ হইতে,

$$\frac{\overline{PL}}{\overline{CL}}=\tan\theta,$$

অথবা, $\dfrac{y-c}{x}=\tan\theta$,

$\therefore\ y-c=x\tan\theta$,

বা, $\mathbf{y=x\tan\theta+c}$.



চিত্র 20

এখন যেহেতু, এই সমীকরণটি সরল রেখাটির উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

সাধারণতঃ $\tan\theta$কে m দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল, $\mathbf{y=mx+c}$ $[m=\tan\theta]$

দ্রষ্টব্য। (i) $y=mx+c$ সরলরেখাটি (o, c) বিন্দুগামী।

(ii) যদি $c=0$ হয়, তবে সরলরেখাটি মূল বিন্দুগামী হইবে এবং তখন উহার সমীকরণ হইবে, $y=mx$.

(iii) m বা $\tan\theta$ কে বলে সরলরেখার **Gradient** বা **Slope** বা **প্রবণতা** এবং এই সমীকরণকে সরলরেখার **Gradient form** বলা হয়।

(iv) যে সকল সরলরেখার Gradient বা m সমান, তাহারা x-অক্ষের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে, সুতরাং তাহারা সমান্তরাল।

(v) $m=\tan\theta=0$ হইলে, $\theta=0$ হইবে ; অর্থাৎ সরলরেখাটি x-অক্ষের সহিত সমান্তরাল হইবে। $m=0$ হইলে, সমীকরণটি হয়, $y=c$; ইহা যে x-অক্ষের সহিত সমান্তরাল, তাহা তোমরা পূর্বেই দেখিয়াছ।

3·4. যে সরলরেখা $(\mathbf{x_1, y_1})$ বিন্দুগামী এবং যাহার প্রবণতা (Gradient) m, তাহার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the equation of the straight line whose gradient is m and which passes through the point $(\mathbf{x_1, y_1})$].

মনে কর, উহার সমীকরণ, $y = mx + c,$ ... ...(1)

এখন, যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি সরলরেখার উপর অবস্থিত, সুতরাং, উহার স্থানাঙ্ক দ্বারা সরলরেখার সমীকরণ সিদ্ধ হইবে।

$\therefore\ y_1 = mx_1 + c$ ... ...(2)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

3·5. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়। [To find the equation of the straight line passing through two given points.]

মনে কর, নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এবং নির্ণেয় সরলরেখার প্রবণতা (Gradient) m.

এখন, m প্রবণতা (Gradient) বিশিষ্ট এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হইল, $y - y_1 = m(x - x_1)$ ... ...(1)

ইহা (x_2, y_2) দিয়া গেলে,

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ হইবে।

$\therefore\ m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$... ... ...(2)

m-এর মান (1)-এ বসাইয়া পাই,

$\mathbf{y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

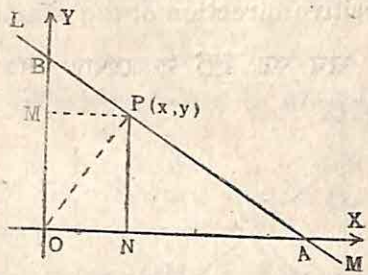
দ্রষ্টব্য। (i) উপরের সমীকরণটির, $\dfrac{\mathbf{x - x_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}} = \dfrac{\mathbf{y - y_1}}{\mathbf{y_2 - y_1}}$ এই আকারটি মনে রাখা সুবিধাজনক।

(ii) উপরের (2)নং সম্পর্ক হইতে বুঝা গেল, দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) দিয়া যায়, এমন সরলরেখার m বা Gradient

$= \dfrac{\mathbf{y_2 - y_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}} = \dfrac{\textbf{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\textbf{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}$।

3·6. যে সরলরেখা x-অক্ষ এবং y-অক্ষ হইতে যথাক্রমে 'a' এবং 'b' অংশ ছেদ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে। [To find the equation of the line which makes intercepts 'a' and 'b' on the x and y-axes respectively.]

মনে কর, $\overleftrightarrow{LM}$ রেখা, $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$-কে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে, যেন $\overline{OA}=a$. এবং $\overline{OB}=b$ হয়।



চিত্র 21

রেখাটির উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু লও। $\overrightarrow{OX}$-এর উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন কর।

তাহা হইলে, $\overline{ON}=x$ এবং $\overline{PN}=y$.

এখন, APN ও ABO সদৃশ ত্রিভুজদ্বয় হইতে পাই,

$$\frac{\overline{PN}}{\overline{BO}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{OA}-\overline{ON}}{\overline{OA}}=1-\frac{\overline{ON}}{\overline{OA}}$$

অর্থাৎ, $\quad \frac{y}{b}=1-\frac{x}{a}$

বা, $\quad \mathbf{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$, ইহাই রেখাটির সমীকরণ।

বিকল্প পদ্ধতি। $\triangle OPA+\triangle OPB=\triangle OAB$,

বা, $\frac{1}{2}\overline{OA}.\ \overline{PN}+\frac{1}{2}\overline{OB}.\overline{ON}=\frac{1}{2}\overline{OA}.\overline{OB}$,

বা, $a.y+b.x=a.b$,

উভয়পক্ষকে ab দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $\mathbf{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$.

দ্রষ্টব্য। (i) যদি সরলরেখাটি কোন অক্ষকে ঋণাত্মক দিকে ছেদ করে, তাহা হইলে সেই অক্ষের ছেদিতাংশ (intercept) কে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে।

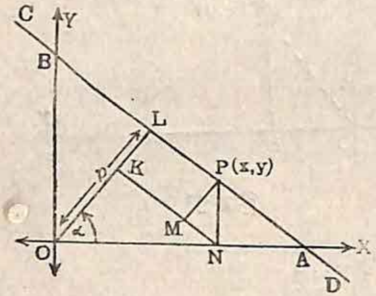
(ii) সরলরেখাটি $(a, 0)$ এবং $(0, b)$ বিন্দুদ্বয়গামী।

(iii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ কে সরলরেখার **ছেদিতাংশ রূপ** (intercept form) বলে।

3·7. যদি মূল বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p হয় এবং ঐ লম্ব, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত α কোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে তাহার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the equation to the straight line in terms of the length of the perpendicular p drawn to it from the origin and the angle α that this perpendicular makes with the positive direction of the x-axis.]

মনে কর, $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত $\overline{OL}$ লম্বের দৈর্ঘ্য $=p$, এবং $\angle LOX=\alpha$.



চিত্র 22

$\overleftrightarrow{CD}$ এর সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

সরলরেখাটির উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু লও এবং উহা হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন কর।

তাহা হইলে, $\overline{ON}=x$, $\overline{NP}=y$.

N হইতে $\overline{OL}$-এর উপর $\overline{NK}$ লম্ব এবং P হইতে $\overline{NK}$-এর উপর $\overline{PM}$ লম্ব অঙ্কন কর।

তাহা হইলে, $\angle PNM=90^\circ-\angle ONK=\alpha$.

চিত্র হইতে, $p=\overline{OL}=\overline{OK}+\overline{KL}=\overline{OK}+\overline{PM}$ ... ...(1)

এখন, $\dfrac{\overline{OK}}{\overline{ON}}=\cos\alpha$, বা, $\overline{OK}=\overline{ON}\cos\alpha=x\cos\alpha$.

আবার, $\dfrac{\overline{PM}}{\overline{NP}}=\sin\alpha$, বা, $\overline{PM}=\overline{PN}\sin\alpha=y\sin\alpha$.

$\therefore$ $\overline{OK}=x\cos\alpha$ এবং $\overline{PM}=y\sin\alpha$, (1)-এ বসাইয়া পাই,

$$p=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$

বা, $\mathbf{x\cos\alpha+y\sin\alpha=p}$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ ; কারণ, ইহা রেখাটির উপর **যে কোন** বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

বিকল্প পদ্ধতি।

উপরের চিত্র হইতে পাই, $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OL}}=\sec\alpha$, বা, $\overline{OA}=\overline{OL}\sec\alpha=p\sec\alpha$,

এবং $\frac{\overline{OB}}{\overline{OL}}=\sec(90^\circ-\alpha)$, বা, $\overline{OB}=\overline{OL}\ \text{cosec}\ \alpha=p\ \text{cosec}\ \alpha$.

এখন, $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার ছেদিতাংশ রূপ (intercept form) সমীকরণ হইল,

$$\frac{x}{\overline{OA}}+\frac{y}{\overline{OB}}=1,\quad \text{বা,}\quad \frac{x}{p\sec\alpha}+\frac{y}{p\ \text{cosec}\ \alpha}=1,$$

অর্থাৎ, $\mathbf{x\cos\alpha+y\sin\alpha=p}$.

দ্রষ্টব্য। (i) উপরের সমীকরণে p সর্বদাই ধনাত্মক এবং α, 0° হইতে 360°-এর মধ্যে থাকিবে।

(ii) সরলরেখার সমীকরণের এই আকারকে **Normal form** বা **Perpendicular form** বা Canonical form বলা হয়।

3·8. তোমরা এতক্ষণ দেখিলে, সরলরেখার সমীকরণের বিভিন্ন রূপ হইতে পারে।

সমীকরণের রূপ যাহাই হউক না কেন, উহাতে দুইটি পরস্পর স্বাধীন ধ্রুবক (Two independent constants) আছে। এই ধ্রুবক দুইটি নির্ণীত হইলেই সমীকরণ নির্ণীত হইবে।

(i) **Gradient form**-এর সমীকরণ, $y=mx+c$-তে ধ্রুবক দুইটি হইল, $m=\tan\theta$ এবং c; m এবং c কি নির্দেশ করে তাহা তোমরা পূর্বেই জানিয়াছ।

(ii) **Intercept form**-এর সমীকরণ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$-এ ধ্রুবক দুইটি a এবং b.

(iii) Normal form-এর সমীকরণ, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$, এ ধ্রুবক দুইটি হইতেছে p এবং α.

দুইটি ধ্রুবককে নির্ণয় করিতে দুইটি সর্তের প্রয়োজন। সুতরাং, দুইটি সর্ত দেওয়া থাকিলে, সরলরেখার সমীকরণ নির্দিষ্টরূপে নির্ণয় করা যাইবে।

তোমরা জান যে, সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ আকার হইল $ax+by+c=0$; এখন তোমাদের মনে হইতে পারে, ইহাতে তিনটি ধ্রুবক a, b ও c রহিয়াছে। সুতরাং, দুইটি সর্ত হইতে উহাদেরকে নির্ণয় করা যাইবে না। এখানে ধ্রুবকের সংখ্যা তিন হইলেও উহারা পরস্পর স্বাধীন নয়; অর্থাৎ উহাদেরকে দুইটি ধ্রুবকে পরিণত করা যায়। যথা :—

$$ax+by+c=0$$

বা, $x+\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}=0$, [$a=0$ না হইলে]

বা, $x+py+q=0$. $\left[p=\frac{b}{a}\right.$ এবং $\left.q=\frac{c}{a}\right.$ লইয়া $\Big]$

এখন, $ax+by+c=0$ এবং $x+py+q=0$ সমীকরণ দুইটি একই রেখার সমীকরণ ; কিন্তু দ্বিতীয়টিতে দুইটি ধ্রুবক যথা p ও q রহিয়াছে।

3·9. সরলরেখার সাধারণ সমীকরণকে বিভিন্ন আকারে প্রকাশ। [**Reduction of general equation of straight line in different forms.**]

(a) Gradient form (প্রবণতা রূপ)

সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপ হইল, $ax+by+c=0$.

$\therefore\ by=-ax-c$; $\therefore\ y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, ইহার আকার $y=mx+c$ এর অনুরূপ। এখানে, m-এর স্থানে আছে $-\frac{a}{b}$ এবং c-এর স্থানে আছে $-\frac{c}{b}$.

(b) Intercept form (ছেদিতাংশ রূপ)

$ax+by+c=0$, বা, $ax+by=-c$,

বা, $\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$, বা, $\frac{x}{-\frac{c}{a}}+\frac{y}{-\frac{c}{b}}=1$:

ইহার আকার $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$-এর অনুরূপ। এখানে a-এর স্থানে $-\frac{c}{a}$ এবং b-এর স্থানে $-\frac{c}{b}$ রহিয়াছে।

(c) Normal form (লম্ব রূপ)

সরলরেখার সমীকরণের সাধারণ রূপ হইল,

$$ax+by+c=0.$$

$$\therefore\ ax+by=-c.$$

মনে কর, ইহাকে k দ্বারা গুণ করিলে ইহার আকার
$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, এর অনুরূপ হইবে।

$\therefore\ k.ax + k.by = -kc$, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, এর অনুরূপ।

$\therefore\ ka = \cos \alpha$, $kb = \sin \alpha$ এবং $-kc = p$ হইবে।

এখন, $k^2a^2 + k^2b^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$,

$$\therefore\ k^2 = \frac{1}{a^2+b^2}\ ;\ \therefore\ k = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

তাহা হইলে, $\cos \alpha = ka = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

এবং $\sin \alpha = kb = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

এবং $p = \dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

সুতরাং, $ax + by + c = 0$ সমীকরণটির নূতন রূপ হইল,

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

বা, $\dfrac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$

কিন্তু, p সর্বদাই ধনাত্মক ; **সুতরাং, c ধনাত্মক হইলে, $-\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা এবং c ঋণাত্মক হইলে, $+\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণকে ভাগ করিলে, Normal form বা লম্ব আকার পাওয়া যাইবে।**

দ্রষ্টব্য। এখানে $p = \dfrac{c}{\mp\sqrt{a^2+b^2}}$; সুতরাং, মূলবিন্দু হইতে কোন রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইলে, সমীকরণের ধ্রুবক পদটিকে x ও y এর সহগদ্বয়ের বর্গের সমষ্টির বর্গমূল দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। ভাগফলটিকে সর্বদা ধনাত্মক রাখিতে হইবে।

3·10. উদাহরণমালা।

উদা. 1. $(3, -2)$ বিন্দুগামী ও x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line parallel to the x-axis and passing through the point $(3, -2)$]

x-অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরল রেখার সমীকরণ হইল, $y = k$.

এখন, ইহা $(3, -2)$ বিন্দুগামী বলিয়া, $-2=k$, অর্থাৎ, $k=-2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $y=-2$, বা, $y+2=0$.

উদা. 2. $x+7y-3=0$, সরল রেখাটির প্রবণতা (Gradient) নির্ণয় কর।

[Find the gradient of the line, $x+7y-3=0$.]

প্রদত্ত সমীকরণ, $x+7y-3=0$, বা, $7y=-x+3$,

বা, $y=-\frac{1}{7}x+\frac{3}{7}$, ইহা $y=mx+c$ আকারের হইল।

সুতরাং প্রবণতা (gradient) $=-\frac{1}{7}$.

দ্রষ্টব্য। y-অক্ষ হইতে ছেদিত অংশ (intercept from y axis) $=\frac{3}{7}$.

উদা. 3. একটি সরলরেখার প্রবণতা $\frac{1}{4}$ এবং উহা $(1, -1)$ বিন্দু দিয়া যায় : সরল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line through $(1, -1)$ having gradient $\frac{1}{4}$.]

(x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার gradient m হইলে, উহার সমীকরণ,

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

এখানে, $m=\frac{1}{4}$, $x_1=1$ ও $y_1=-1$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $y-(-1)=\frac{1}{4}(x-1)$,

বা, $4(y+1)=x-1$, বা, $x-4y-5=0$.

উদা. 4. যে সরলরেখা x-অক্ষের সহিত $120°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y অক্ষের ঋণাত্মক দিক হইতে 4 একক অংশ ছেদ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the st. line cutting off the negative side of y-axis by 4 units and at $120°$ to the x-axis.].

এখানে, $m=\tan 120°=-\sqrt{3}$, এবং $c=-4$.

$\therefore$ সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ, $y=-\sqrt{3}x-4$,

বা, $\sqrt{3}x+y+4=0$.

উদা. 5. (1, 2) ও (2, 3) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the st. line passing through the points (1, 2) and (2, 3).]

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হইল,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-2}{3-2}$, বা, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}$

বা, $x-y+1=0$.

উদা. 6. $(-4, 3)$ বিন্দুগামী যে সরলরেখা x-অক্ষ ও y-অক্ষ হইতে সমান অংশ (equal intercepts) কাটিয়া লয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line which cuts off equal intercepts from the axes and passes through the point $(-4, 3)$.]

মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণ, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$; বা, $x+y=a$.

যেহেতু, ইহা, $(-4, 3)$ বিন্দু দিয়া যায়,

$\therefore$ $-4+3=a$, বা, $a=-1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x+y=-1$; বা, $x+y+1=0$.

উদা. 7. একটি সরলরেখা (3, 2) বিন্দু দিয়া যায় এবং প্রথম পাদে (first quadrant) অক্ষদ্বয়ের সহিত 12 একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line which passes through the point (3, 2) and cuts off a triangle of area 12 units from the first quadrant.]

মনে কর, রেখাটি x ও y অক্ষ হইতে যথাক্রমে a ও b অংশ ছিন্ন করে। তাহা হইলে সরল রেখাটির সমীকরণ হয়,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}ab=12$; বা, $ab=24$ $\cdots$ $\cdots$ (2)

$\because$ রেখাটি (3, 2) বিন্দুগামী, সুতরাং, $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$,

বা, $3b+2a=ab$, বা, $3b+2a=24$, $\therefore$ $b=\frac{24-2a}{3}$.

এখন, b এর মান (2) এ বসাইয়া পাই, $a(24-2a)=72$,

বা, $a^2-12a+36=0$; বা, $(a-6)^2=0$,

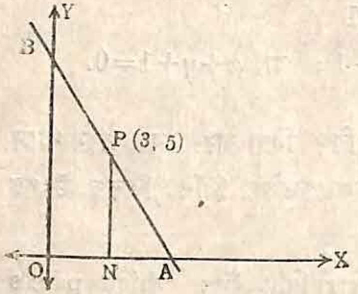
$a=6$; $b=\frac{24-2\times 6}{3}=4$.

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$; বা, $6x+4y-24=0$.

উদা. 8. (3, 5) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী ছেদিতাংশ ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইলে, উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[A straight line is drawn through the point (3, 5) such that the portion of the line intercepted between the axes is bisected at the point. Find its equation.]

মনে কর, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।



চিত্র 23

$\overline{AB}$ অংশের মধ্যবিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (3, 5). x-অক্ষের উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন কর।

এখন, $\overline{ON}=3$, এবং $\overline{PN}=5$.

কিন্তু, P, $\overline{AB}$ বাহুর মধ্যবিন্দু এবং $\overline{PN} \parallel \overline{BO}$,

সুতরাং, N, $\overline{OA}$ বাহুর মধ্য বিন্দু, এবং $\overline{PN}=\frac{1}{2}\,\overline{BO}$.

$\therefore$ $\overline{OA}=2\overline{ON}=2.3=6$; $\overline{OB}=2\overline{PN}=2\cdot5=10$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x}{6}+\frac{y}{10}=1$; বা, $5x+3y-30=0$

উদা. 9. মূলবিন্দু হইতে, $12x-5y=13$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the length of the perpendicular from the origin upon the line $12x-5y=13$.]

$$\text{নির্ণেয় দৈর্ঘ্য} = \frac{13}{\sqrt{(12)^2+(-5)^2}} = \frac{13}{13} = 1.$$

উদা. 10. $3x+4y+15=0$ কে লম্ব আকার (normal form) এ প্রকাশ কর এবং মূলবিন্দু হইতে উহার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Reduce $3x+4y+15=0$ to the normal form and hence find the length of the perpendicular from the origin upon the given straight line.]

প্রদত্ত সমীকরণ, $3x+4y+15=0$.

এখানে, ধ্রুবক পদটি ধনাত্মক ; সুতরাং, $-\sqrt{3^2+4^2}$ দ্বারা ভাগ করিলে normal form পাওয়া যাইবে।

এখন, $-\sqrt{3^2+4^2}=-5$.

$\therefore$ নির্ণেয় আকার, $-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$.

ইহা, $x \cos \alpha+y \sin \alpha-p=0$ এর অনুরূপ।

$\therefore$ মূলবিন্দু হইতে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $=p=3$.

দ্রষ্টব্য। এখানে, $\cos \alpha=-\frac{3}{5}$ এবং $\sin \alpha=-\frac{4}{5}$,

সুতরাং, $\alpha=\cos^{-1}(-\frac{3}{5})=\sin^{-1}(-\frac{4}{5})$ হইবে।

প্রশ্নমালা (Exercise) 3A

1. নিম্নের সরলরেখাগুলিকে Gradient form এ রূপান্তরিত করিয়া উহাদের Gradient এবং উহারা y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

[Reduce the following equations to the gradient form and find the gradient and co-ordinates of the point where each intersects the y-axis :]

(i) $2x-3y=2$, (ii) $3x-y=6$,

(iii) $x-y=0$, (iv) $5x+2y+10=0$.

2. নিম্নে প্রদত্ত রেখাগুলি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ নির্ণয় কর :

[Find the intercepts on the axes by the following lines :]

(i) $x+5y=3$, (ii) $2x-y=5$, (iii) $3x+4y+5=0$.

3. নিম্নের সমীকরণগুলিকে লম্ব আকারে (অর্থাৎ $x \cos \alpha+y \sin\alpha=p$) পরিণত কর :

[Reduce the following equations to the perpendicular form :]

(i) $x+\sqrt{3}y=4$, (ii) $x-y+5\sqrt{2}=0$,

(iii) $x+y+8=0$, (iv) $x-y\sqrt{3}-6=0$.

4. মূলবিন্দু হইতে প্রদত্ত সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :

[Find the lengths of the perpendiculars from the origin on the lines whose equations are given below :]

(i) $4x+3y-10=0$, (ii) $5x+12y=39$,

(iii) $2x+y+3=0$.

5. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :

[Find the lines passing through the following points :]

(i) $(3, 11)$ ও $(0, 2)$, (ii) $(1, 1)$ ও $(3, -\frac{1}{2})$

(iii) $(-1, 2)$ ও $(3, -4)$. (iv) $(at^2, 2at)$ ও $(at_1^2, 2at_1)$.

6. যে সরল রেখা y-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে 4 একক অংশ ছিন্ন করে এবং x-অক্ষের সহিত 45° কোণ উৎপন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the st. line which makes an intercept of 4 units from the positive side of the y-axis and is inclined at an angle of 45° with the x-axis.]

7. যে সরল রেখা y-অক্ষের ঋণাত্মক দিক হইতে 3 একক অংশ ছিন্ন করে এবং x-অক্ষের সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line which cuts off an intercept of 3 units from the negative side of the y-axis and is inclined at an angle of 30° with the x-axis.]

3. যে সরল রেখা অক্ষদ্বয় হইতে যথাক্রমে (i) 4, 3 একক, (ii) 3, -2 একক ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line which makes intercepts (i) 4, 3 units, (ii) 3, -2 units from the axes.]

9. (1, 2) বিন্দুগামী যে সরল রেখা অক্ষদ্বয় হইতে (i) ধনাত্মক সমান অংশ, (ii) বিপরীত চিহ্নযুক্ত সমান অংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the line passing through (1, 2) and making equal intercepts on the axes (i) both positive and (ii) one negative and the other positive.]

10. (6, 7) বিন্দুগামী যে সরল রেখার প্রবণতা (gradient) $-\frac{3}{4}$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line passing through the point (6, 7) and having gradient $-\frac{3}{4}$.]

11. একটি সরল রেখা (-4, 3) বিন্দু দিয়া যায় এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে উহার ছিন্ন অংশটি ঐ বিন্দুতে 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line which passes through the point (-4, 3) and is such that the portion of it intercepted between the axes is divided at the point internally in the ratio 3 : 2.]

12. একটি সরল রেখা প্রথম পাদে (in first quadrant) অক্ষদ্বয়ের সহিত একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। উহার ক্ষেত্রফল 18 একক হইলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line which cuts off from the first quadrant an isosceles triangle having an area of 18 units.]

13. (9, -8) বিন্দুগামী একটি সরল রেখা প্রথম পাদে অক্ষদ্বয়ের সহিত একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। উহার ক্ষেত্রফল 6 একক হইলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the line which cuts off from the first quadrant a triangle whose area is 6 units and which passes through the point (9, -8).]

14. কোন সরল রেখা অক্ষদ্বয়ের সহিত একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। যদি উহার অতিভুজ 13 এবং ক্ষেত্রফল 30 হয়, তবে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[A straight line forms a right angled triangle with the axes of co-ordinates. If the hypotenuse is 13 and the area of the triangle is 30, find the equation of the straight line.]

15. (3, −2) বিন্দুগামী যে সরল রেখা x-অক্ষের সহিত 135° কোণ উৎপন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর ; উহা অক্ষদ্বয় হইতে যে যে অংশ ছিন্ন করে তাহা এবং মূল বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line through the point (3, −2) making an angle 135° with the x-axis and find its intercepts on the axes and distance from the origin.]

16. (−2, 4) বিন্দুগামী যে সরল রেখার x-অক্ষ হইতে ছিন্ন অংশ y-অক্ষ হইতে ছিন্ন অংশের দ্বিগুণ, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line through the point (−2, 4) and having an intercept on the x-axis equal to twice its intercept on the y-axis.]

17. সরল রেখার সমীকরণের সাহায্যে দেখাও যে, নিম্নের বিন্দুগুলি সমরেখ :

[Show, by using the equation of a straight line, that the following points are collinear :]

(i) (−3, 2), (6, −4) ও (9, −6) ;

(ii) (2, 2), (4, 4) ও (6, 6) ;

(iii) (3, 1), (5, −5) ও (−1, 13) ;

(iv) ($3a$, 0), (0, $3b$) ও (a, $2b$).

18. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি (3, 4), (−4, 2) ও (3, −4) ; উহার বাহুগুলির এবং মধ্যমাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations of the sides and medians of the triangle whose vertices are (3, 4), (−4, 2) and (3, −4).]

19. (2, 3) বিন্দুগামী যে সরল রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশদ্বয়ের (intercepts) সমষ্টি 10, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the straight line which passes through the point (2, 3) and is such that the sum of its intercepts on the axes is 10.]

20. যদি মূলবিন্দু হইতে $x \sin\theta + y \cos\theta = \frac{a}{2} \sin 2\theta$ ও $x \cos\theta - y \sin\theta = a \cos 2\theta$ রেখাদ্বয়ের উপর লম্বদ্বয় p_1 ও p_2 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $4p_1^2 + p_2^2 = a^2$, হইবে।

[If p_1 and p_2 be the perpendiculars from the origin upon the lines $x \sin\theta + y \cos\theta = \frac{a}{2} \sin 2\theta$ and $x \cos\theta - y \sin\theta = a \cos 2\theta$, prove that $4p_1^2 + p_2^2 = a^2$.]

21. একটি সরল রেখা এরূপে গতিশীল যে উহার সর্ব অবস্থানে উহা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছিন্ন অংশ দুইটির অন্যোন্যকের সমষ্টি ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে, রেখাটি একটি স্থির বিন্দু দিয়া যায়।

[A straight line moves so that the sum of the reciprocals of its intercepts on the axes is constant. Prove that the line passes through a fixed point.]

3·11 দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয়।

[To find the angle between two straight lines.]

(1) মনে কর, সরল রেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ এবং উহারা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যথাক্রমে θ_1 এবং θ_2 কোণে নত। তাহা হইলে, $m_1 = \tan\theta_1$ এবং $m_2 = \tan\theta_2$

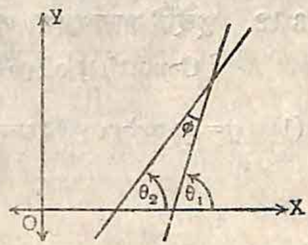
সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত

কোণ ϕ হইলে, $\phi = \theta_1 - \theta_2$

$$\therefore \tan\phi = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 . \tan\theta_2}$$

$$= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}.$$



$$\therefore \phi = \tan^{-1} \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

চিত্র 24

(2) সরল রেখাদ্বয়ের সমীকরণ সাধারণ আকারের অর্থাৎ, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ আকারের হইলে, তখন উহাদিগকে $y = mx + c$ আকারে সাজাইয়া লইতে হইবে।

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \text{ হইতে পাই } y=-\frac{a_1x}{b_1}-\frac{c_1}{b_1};$$

$$\text{এবং, } a_2x+b_2y+c_2=0, \text{ হইতে } y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2}.$$

$$\therefore \quad m_1=-\frac{a_1}{b_1} \text{ এবং } m_2=-\frac{a_2}{b_2};$$

$$\text{সুতরাং, } \tan\phi=\frac{-\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}}{1+\dfrac{a_1}{b_1}\times\dfrac{a_2}{b_2}}=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$$

$$\therefore \quad \phi=\tan^{-1}\frac{\mathbf{a_2b_1-a_1b_2}}{\mathbf{a_1a_2+b_1b_2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(3) সরল রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$ এবং, $x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$ হইলে, মূলবিন্দু হইতে রেখাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় x-অক্ষের সহিত যথাক্রমে α_1 এবং α_2 কোণ উৎপন্ন করে।

এখন, দুইটি সরলরেখার অন্তবর্তী কোণ, উহাদের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান বা সম্পূরক (supplimentary) ; অতএব প্রদত্ত সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\phi=\alpha_1-\alpha_2$, বা, $\pi-(\alpha_1-\alpha_2)$.

3·12. দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার সর্ত।

[Condition of parallelism of two st. lines.]

(1) $y=m_1x+c_1$ এবং $y=m_2x+c_2$ সরল রেখাদ্বয় সমান্তরাল হইলে,

$$\phi=0,$$

$$\therefore \quad \tan\phi=0,$$

$$\therefore \quad \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=0,$$

$$\therefore \quad m_1-m_2=0, \text{ বা, } \mathbf{m_1=m_2}.$$

অর্থাৎ, রেখাদ্বয় সমান্তরাল হইলে, উহাদের gradient দ্বয় সমান হইবে।

(2) রেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ হইলে, $m_1=-\frac{a_1}{b_1}$; $m_2=-\frac{a_2}{b_2}$. [পূর্ব অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য

সুতরাং, রেখাদ্বয় সমান্তরাল হইলে, $m_1=m_2$,

বা, $-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}$, অর্থাৎ, $\mathbf{\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}}$.

3·13. দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার সর্ত।

[Condition of perpendicularity of two st. lines.]

(1) মনে কর, $y=m_1x+c_1$ এবং $y=m_2x+c_2$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

সুতরাং, $\phi=90°$,

$\therefore\ \cot\phi=\cot 90°=0.$

$\therefore\ \frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}=0,$

$\left[\tan\phi=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2},\quad \text{সুতরাং}\ \cot\phi=\frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}\right]$

$\therefore\ 1+m_1m_2=0,$ অর্থাৎ, $\mathbf{m_1m_2=-1}$.

$\therefore$ **দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হইলে, উহাদের gradient দ্বয়ের গুণফল -1 হইবে।**

(2) রেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ হইলে, $m_1=-\frac{a_1}{b_1}$; $m_2=-\frac{a_2}{b_2}$.

$\therefore$ উহারা পরস্পর লম্ব হইলে, $\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)=-1$

বা, $\frac{a_1a_2}{b_1b_2}=-1,$

অর্থাৎ, $\mathbf{a_1a_2+b_1b_2=0}$.

3·14 অনুচ্ছেদ 3·12 এর আলোচনায় দেখা গিয়াছে যে, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ হইলে, $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হইবে।

মনে কর, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k,$

তাহা হইলে, $a_1=a_2k$ এবং $b_1=b_2k,$

a_1, b_1 এর মান প্রথম সমীকরণে বসাইলে পাই,

$a_2kx+b_2ky+c_1=0,$

বা, $a_2x+b_2y+\frac{c_1}{k}=0$

অর্থাৎ, $a_2x+b_2y+c'=0$

$\left[c'=\frac{c_1}{k}\right.$ লইয়া ; c_1, k ধ্রুবক বলিয়া c' ও ধ্রুবক$\left.\right]$

প্রথম সমীকরণের, এই পরিবর্তিত রূপের সহিত দ্বিতীয় সমীকরণের পার্থক্য শুধু ধ্রুবক পদে।

সুতরাং, বুঝিতে পারা গেল, **কোন সরলরেখার সহিত সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ লইতে হইলে, প্রথম সরলরেখার সমীকরণের কেবলমাত্র ধ্রুবক পদটি পরিবর্তিত করিতে হইবে।**

যেমন, $2x-3y+5=0$ এর সহিত সমান্তরাল সরলরেখা হইবে,

$$2x-3y+k=0.$$

আবার $a_1a_2+b_1b_2=0$ হইলে, $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হইবে।

এখন $a_1a_2+b_1b_2=0$ হইলে, $\frac{a_1}{b_1}=-\frac{b_2}{a_2}$ হইবে।

প্রথম রেখার সমীকরণ, $a_1x+b_1y+c_1=0,$

বা, $\frac{a_1x}{b_1}x+y+\frac{c_1}{b_1}=0,$

বা, $-\frac{b_2}{a_2}x+y+\frac{c_1}{b_1}=0,$

বা, $-b_2x+a_2y+\frac{c_1a_2}{b_1}=0$

অর্থাৎ, $-b_2x+a_2y+c'=0$ $\left[c'=\frac{c_1a_2}{b_1}\text{ (ধ্রুবক) }\right]$

প্রথম সমীকরণের এই পরিবর্তিত রূপের সহিত দ্বিতীয় সমীকরণকে তুলনা করিলে বুঝিতে পারা যায়—**কোন সরলরেখার সহিত লম্ব অপর কোন সরলরেখার সমীকরণ লইতে হইলে, প্রদত্ত সমীকরণের x ও y এর সহগ বিনিময় করিয়া উহাদের যে কোন একটির চিহ্ন পরিবর্তন করিতে হইবে এবং একটি ধ্রুবক পদ যোগ করিতে হইবে।**

যেমন, $2x+3y+7=0$ এর সহিত লম্ব যে কোন সরলরেখা হইবে $-3x+2y+k=0$ বা, $3x-2y+k=0$.

3·15. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় :

[To find the co-ordinates of the point of intersection of two straight lines.]

মনে কর, সরল রেখাদ্বয়ের সমীকরণ :

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$

এবং $a_2x+b_2y+c_2=0.$

উহারা (h, k) বিন্দুতে ছেদ করিলে, (h, k) উভয় সমীকরণকেই সিদ্ধ করিবে।

সুতরাং, $a_1h+b_1k+c_1=0,$

$$a_2h+b_2k+c_2=0.$$

এখন, বজ্রগুণন-প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{h}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{k}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

$$\therefore\ h=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\text{ এবং } k=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $\left(\frac{\mathbf{b_1c_2-b_2c_1}}{\mathbf{a_1b_2-a_2b_1}},\ \frac{\mathbf{c_1a_2-c_2a_1}}{\mathbf{a_1b_2-a_2b_1}}\right).$

দ্রষ্টব্য। উপরের আলোচনা হইতে ইহা স্পষ্ট যে, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সমাধানই ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক।

3·16. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ। [Equation of a line through the intersection of two given lines.]

মনে কর, সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ,

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং
$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, (1) এবং (2) এর সাহায্যে নিম্নের সমীকরণটি গঠন কর :

$$\mathbf{a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0} \cdots (3)$$

[এখানে k যে কোন একটি ধ্রুবক]

k এর মান যাহাই হউক না কেন, (3) সমীকরণটি x এবং y দ্বারা প্রকাশিত একটি একঘাত সমীকরণ বলিয়া, নিশ্চয়ই একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে। আবার, (1) ও (2) সমীকরণদ্বয় x এবং y এর যে যে মান দ্বারা যুগপৎ সিদ্ধ হয়, (3) সমীকরণটিও x ও y এর সেই সেই মান দ্বারা সিদ্ধ হয়। কিন্তু (1) ও (2) যুগপৎ সিদ্ধ হইবে কেবলমাত্র উহাদের সাধারণ বিন্দুর অর্থাৎ ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা। সুতরাং, (3) সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত রেখাটি (1) ও (2) এর ছেদ-বিন্দুগামী।

$\therefore$ k এর যে কোন মানের জন্য (3) সমীকরণটি (1) ও (2) দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

$\therefore$ (3) ই নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য। দুইটি প্রদত্ত সরলরেখার ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং অপর একটি সর্ত পূর্ণ করে—এইরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাহায্যে (3) এর অনুরূপ সমীকরণ গঠন করিতে হইবে। ইহার পর প্রদত্ত অপর সর্ত প্রয়োগ করিলে k এর মান নির্ণীত হইবে এবং রেখাটির সমীকরণও নির্দিষ্টরূপে জানিতে পারা যাইবে।

·17. তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার সর্ত। [To find the condition of concurrence of three straight lines.]

মনে কর, রেখা তিনটির সমীকরণগুলি,

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

উহাদের যে কোন দুইটি রেখার ছেদবিন্দু যদি তৃতীয়টির উপর অবস্থিত হয়, অর্থাৎ ঐ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি তৃতীয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তবে সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু হইবে।

এখন, (1) ও (2) এর ছেদবিন্দু হইল, $\left(\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\ \dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$

এই ছেদবিন্দু (3) এর উপর অবস্থিত হইলে,

$$\mathbf{a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0}\cdots\mathbf{(4)}$$

ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

দ্রষ্টব্য। (i) অঙ্ক কষিবার সময় উপরের সূত্র প্রয়োগ না করিয়া ঐ পদ্ধতির প্রয়োগ সুবিধাজনক, কারণ ইহাতে সূত্রটি মুখস্থ রাখিবার প্রয়োজন হইবে না।

(ii) উপরের (4) সর্তটি পাওয়া গিয়াছে, (1), (2) ও (3) হইতে x, y এর অপনয়ন (elimination) দ্বারা। এই অপনয়ন করিবার জন্য **determinant** এর সাহায্য লইলে, সর্তটি হইবে,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

3·18. উদাহরণমালা।

উদা. 1. $y=2x+3$ এবং $3y=x+6$ রেখাদ্বয়ের অন্তবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

[Find the angle between the lines $y=2x+3$ and $3y=x+6$.]

মনে কর, নির্ণেয় কোণ ϕ.

রেখাদ্বয়ের gradient দ্বয় যথাক্রমে, $m_1=2$ এবং $m_2=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ \tan\phi=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2.\frac{1}{3}}=1=\tan 45^\circ;$$

$\therefore\ \phi=45^\circ$. অর্থাৎ নির্ণেয় কোণ 45°.

উদা. 2 $4x-3y+1=0$ রেখার সমান্তরাল এবং (3, 5) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**Find the equation to the straight line passing through the point (3, 5) and parallel to the line $4x-3y+1=0$.**]

$4x-3y+1=0$ এর সহিত সমান্তরাল যে কোন রেখার সমীকরণ হইবে $4x-3y+k=0$.

এখন, উহা (3, 5) বিন্দু দিয়া যাইলে, $4.3-3.5+k=0$, বা, $k=3$.

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ, $4x-3y+3=0$.

উদা. 3. $(2, -1)$ বিন্দুগামী এবং $2x+7y-2=0$ সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**Find the equation to the line passing through $(2, -1)$ and perpendicular to the line $2x+7y-2=0$.**]

$2x+7y-2=0$ এর উপর লম্ব যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে, $7x-2y+k=0$.

উহা, $(2, -1)$ বিন্দুগামী হইলে, $7.2-2(-1)+k=0$, বা, $k=-16$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $7x-2y-16=0$.

উদা. 4. (3, 5) ও (9, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**Find the equation to the perpendicular bisector of the segment joining the points (3, 5) and (9, 7).**]

(3, 5) ও (9, 7) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{3+9}{2}, \frac{5+7}{2}\right)$ বা, (6, 6) এবং উহাদের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ হইল,

$$\frac{x-3}{9-3}=\frac{y-5}{7-5}, \text{ বা, } \frac{x-3}{6}=\frac{y-5}{2},$$

বা, $2x-6=6y-30$, বা, $x-3y+12=0$.

এখন, $x-3y+12=0$ এর সহিত লম্বভাবে অবস্থিত যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইল, $3x+y+k=0$.

ইহা যদি নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে ইহাকে (6, 6) বিন্দুগামী হইতে হইবে।

সুতরাং, $3.6+6+k=0$, বা, $k=-24$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $3x+y-24=0$.

উদা. 5. যে সরলরেখা $3x+2y-1=0$ এবং $2x+y+3=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ও (2, 2) দিয়া যায়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the straight line which passes through the point (2,2) and the point of intersection of the lines $3x+2y-1=0$ and $2x+y+3=0$.]

$3x+2y-1=0$ এবং $2x+y+3=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন রেখার সমীকরণ হইবে,

$$3x+2y-1+k(2x+y+3)=0.$$

ইহা (2, 2) বিন্দুগামী হইলে,

$$3.2+2.2-1+k(2.2+2+3)=0, \quad \text{বা, } k=-1.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ, $3x+2y-1-1.(2x+y+3)=0.$

বা, $x+y-4=0.$

দ্রষ্টব্য। প্রথমে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া ছেদবিন্দু নির্ণয় করিয়া পরে সেই ছেদবিন্দু এবং (2, 2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় করা যাইত। বস্তুতঃ, স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে অনেক অঙ্কই একাধিক পদ্ধতিতে করা যায়।

উদা. 6. $x-6y+3=0$ ও $2x+5y-1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $2x-y+5=0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the line through the point of intersection of the lines $x-6y+3=0$ and $2x+5y-1=0$ and perpendicular to the line $2x-y+5=0$.]

$$x-6y+3=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$
$$2x+5y-1=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$
$$2x-y+5=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(1) ও (2) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন রেখার সমীকরণ হইবে,

$$x-6y+3+k(2x+5y-1)=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

বা, $(1+2k)x+(-6+5k)y+(3-k)=0.$

ইহার gradient (প্রবণতা) $= -\dfrac{1+2k}{-6+5k}$,

(3) এর gradient $=2$.

এখন, (4) ও(3) পরস্পর লম্ব হইবার সর্ত হইল,

$$-\frac{1+2k}{-6+5k}\times 2=-1,$$

বা, $2+4k=-6+5k$, বা, $-k=-8$, $\therefore\ k=8$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x-6y+3-8(2x+5y-1)=0$,

বা, $15x+46y-11=0$.

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $2x-7y+10=0$, $3x-2y-1=0$ এবং $x-12y+21=0$, রেখাগুলি সমবিন্দু (concurrent)।

[Prove that the lines $2x-7y+10=0$, $3x-2y-1=0$, and $x-12y+21=0$ are concurrent]

$2x-7y+10=0$ ও $3x-2y-1=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল, $(\frac{27}{17}, \frac{32}{17})$

$(\frac{27}{17}, \frac{32}{17})$, $x-12y+21=0$কে সিদ্ধ করে কি না দেখা যাউক,

এখন, $\frac{27}{17}-12\times\frac{32}{17}+21=\dfrac{27-384+357}{17}=0.$

সুতরাং, দেখা গেল তৃতীয় সমীকরণটি $(\frac{27}{17},\frac{32}{17})$ দ্বারা সিদ্ধ হইল।

অতএব, তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু।

উদা. 8. যে সরলরেখা $3x-4y+1=0$ ও $5x+y-1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যায় এবং অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the straight line which passes through the intersection of the straight lines $3x-4y+1=0$ and $5x+y-1=0$ and cuts off equal intercepts from the axes.]

$3x-4y+1=0$ এবং $5x+y-1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন রেখার সমীকরণ হইবে,

$$3x-4y+1+k(5x+y-1)=0,$$

বা, $(5k+3)\,x+(k-4)y-(k-1)=0.$

ইহাকে ছেদিতাংশ আকারে (intercept form) সাজাইয়া পাওয়া যায়,

$$\frac{x}{\frac{k-1}{5k+3}}+\frac{y}{\frac{k-1}{k-4}}=1\ ;$$

যেহেতু, ইহা অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছিন্ন করে,

অতএব, $\frac{k-1}{5k+3}=\frac{k-1}{k-4}$,

বা, $4k^2+3k-7=0$;

$\therefore$ $k=1$, বা, $-\frac{7}{4}$.

$k=1$ হইলে সমীকরণ হয়, $8x-3y=0$ ....(1)

এবং $k=-\frac{7}{4}$ হইলে সমীকরণ হয়, $23x+23y-11=0$ ...(2)

এখন (1) নং সমীকরণ নির্ণেয় সমীকরণ হইতে পারে না ; কারণ ইহাতে ধ্রুবক পদটি শূন্য বলিয়া ইহা মূল বিন্দুগামী ; সুতরাং, অক্ষদ্বয় হইতে সমান বা অসমান কোন অংশই ছিন্ন করে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $23x+23y-11=0$.

প্রশ্নমালা (Exercise) 3B

1. নিম্নের সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর :

[Find the angle between the lines.]

(i) $5x-12y+8=0$, এবং $7x+17y+10=0$.

(ii) $x-y\sqrt{3}=5$, এবং $x\sqrt{3}+y=7$.

(iii) $3x+4y+7=0$, এবং $6x+8y+9=0$.

(iv) $2y-x=3$, এবং $y=\frac{1}{3}x+5$.

2. নিম্নে প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

[Find the co-ordinates of the point of intersection of the lines :]

(i) $2x-3y=7$; $3x-4y=13$,

(ii) $y=3x-1$; $2y=x+3$.

(iii) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

3. $(-5, 4)$ বিন্দুগামী এবং $2x-9y=0$ রেখার সহিত সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the straight line passing through $(-5, 4)$ and parallel to the line $2x-9y=0$.]

4. $(4, -5)$ বিন্দুগামী এবং $3x+4y+5=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the straight line passing through $(4, -5)$ and parallel to the line $3x+4y+5=0$.]

5. $(7, -9)$ বিন্দুগামী এবং $2x-5y+7=0$ এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the line passing through $(7, -9)$ and perpendicular to the line $2x-5y+7=0$.]

6. $(2, -1)$ বিন্দুগামী এবং $3x-2y=5$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the straight line passing through the point $(2, -1)$ and perpendicular to the line $3x-2y=5$.]

7. $(4, -5)$ ও $(-7, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the perpendicular bisector of the segent joining the points $(4, -5)$ and $(-7, 3)$.]

8. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্কগুলি $(0, 3)$, $(2, -3)$ ও $(3, 4)$ হইলে, প্রতি শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এই লম্বত্রয় সমবিন্দু। ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর।

[If the vertices of a triangle have co-ordinates $(0, 3)$, $(2, -3)$ and $(3, 4)$, find the equations of the perpendiculars drawn from the vertices on the opposite sides and show that these perpendiculars meet at a point. Find also the co-ordinates of the point.]

9. $x-7y+6=0$ এবং $2x-3y+1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $3x-4y+8=0$ রেখার (i) সমান্তরাল (ii) উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the st. line passing through the point of intersection of $x-7y+6=0$ and $2x-3y+1=0$ and (i) parallel (ii) perpendicular to the line $3x-4y+8=0$.]

10. $(2, -3)$ বিন্দুগামী এবং $(5, 7)$ ও $(-6, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the line passing through $(2, -3)$ and perpendicular to the line joining $(5, 7)$ and $(-6, 3)$.]

11. $3x-5y-16=0$ ও $4x-3y-13=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং দ্বিতীয় রেখাটির উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the line passing through the intersection of $3x-5y-16=0$ and $4x-3y-13=0$ and perpendicular to the second line.]

12. (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং $xx_1+yy_1=a^2$ সরলরেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the line passing through the point (x_1, y_1) and perpendicular to the line $xx_1+yy_1=a^2$.]

13. (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং $yy_1=4a(x+x_1)$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the line passing through the point (x_1, y_1) and perpendicular to the line $yy_1=4a(x+x_1)$.]

14. $(2, 3)$ বিন্দু হইতে $x+y-11=0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর (foot) স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the co-ordinates of the foot of the perpendicular from the point $(2, 3)$ on the line $x+y-11=0$.]

15. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ রেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুগামী এবং রেখাটির উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the line which is perpendicular to the line $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ at the point where it meets the x-axis.]

16. যদি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ রেখাটি, $2x-y=1$ ও $3x-4y+6=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $4x+3y-6=0$ রেখার সমান্তরাল হয়, তবে a ও b-এর মান নির্ণয় কর।

[If the straight line $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ passes through the point of intersection of the lines $2x-y=1$ and $3x-4y+6=0$ and parallel to the line $4x+3y-6=0$, find a and b.]

17. (3, 2) বিন্দুগামী যে রেখা, $y=3x+5$ রেখার সহিত $45°$ কোণে নত (inclined), তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the line which passes through the point (3, 2) and makes an angle $45°$ with the line $y=3x+5$.]

18. (3, 4) বিন্দুগামী দুইটি রেখার প্রত্যেকটি $x-y=2$ রেখার সহিত $45°$ কোণে নত হইলে, উহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations of the two lines through the point (3, 4) and inclined at an angle of $45°$ with the line $x-y=2$.]

19. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{3}x+y=0$, $\sqrt{3}y+x=0$, $\sqrt{3}x+y=1$ ও $\sqrt{3}y+x=1$ রেখা চারিটি দ্বারা উৎপন্ন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে ছেদ করে।

[Prove that the diagonals of the parallelogram formed by the four lines $\sqrt{3}x+y=0$, $\sqrt{3}y+x=0$, $\sqrt{3}x+y=1$ and $\sqrt{3}y+x=1$ are at right angles to one another.]

20. প্রমাণ কর যে নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে সরল রেখাত্রয় সমবিন্দু এবং ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর:

[Prove that the following sets of three lines are concurrent and also find the respective points of concurrence.]

(i) $2x-y-8=0$, $5x+2y-11=0$ ও $4x-3y-18=0$.

(ii) $3x+4y+6=0$, $6x+5y+9=0$ ও $3x+3y+5=0$.

(iii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ ও $x-y=0$.

21. a এর মান কত হইলে, নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু হইবে ?

[For what value of a, will the following sets of three lines be concurrent ?]

(i) $x+y+1=0,\ ax+3y+1=0,\ 3x+4y+2=0.$

(ii) $2x-7y+11=0,\ 3x-2y+1=0,\ ax-12y+21=0.$

22. প্রমাণ কর যে, $ax+by+c=0, bx+cy+a=0$ এবং $cx+ay+b=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হইবে যদি $a+b+c=0$ হয়।

[Prove that the three lines given by $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$ and $cx+ay+b=0$ will be concurrent if $a+b+c=0$.]

3·19. কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the length of the perpendicular from a given point on a given straight line.]

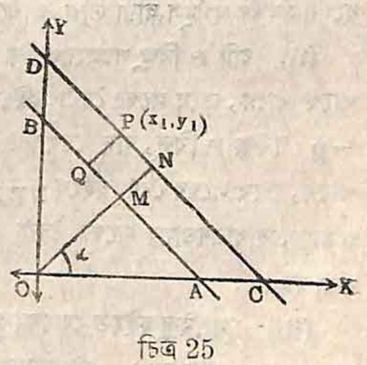
মনে কর, নির্দিষ্ট বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং নির্দিষ্ট সরলরেখাটি $\overleftrightarrow{AB}$. P বিন্দু হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ এর উপর $\overline{PQ}$ লম্ব অঙ্কন কর।

(i) মনে কর, নির্দিষ্ট সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ এর সমীকরণ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots(1)$$

মূলবিন্দু O হইতে এই রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব $\overline{OM}$ হইলে, $\overline{OM}=p$ এবং $\angle XOM=\alpha$.

মনে কর, P বিন্দুগামী এবং $\overleftrightarrow{AB}$ এর সহিত সমান্তরাল রেখা $\overline{OM}$ এর বর্ধিতাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করিল; এখন, $\overline{ON}=p'$ হইলে, $\overleftrightarrow{PC}$ রেখার সমীকরণ হইবে,



চিত্র 25

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p' = 0.$$

যেহেতু, রেখাটি $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী,

$\therefore\ x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = p'$;

$\therefore\ \overline{PQ}=\overline{ON}-\overline{OM}=p'-p=x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p.$

অর্থাৎ, **নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য** $= \mathbf{x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha} - p \cdots(2)$

(ii) মনে কর, নির্দিষ্ট রেখা $\overline{AB}$ এর সমীকরণ, $ax+by+c=0$. এই সমীকরণকে $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ আকারে প্রকাশ করিয়া পাই,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0.$$

এখানে, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এবং $p=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ বিন্দু হইতে নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_1+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_1+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{\mathbf{ax_1+by_1+c}}{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}} \cdots \quad \cdots \quad \cdots (3)$$

অনুসিদ্ধান্ত। মূল বিন্দু হইতে $ax+by+c=0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}}$.

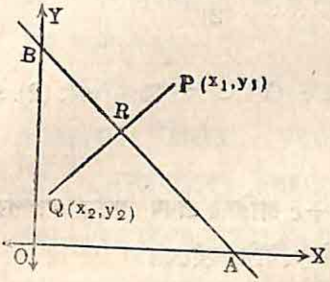
দ্রষ্টব্য। (i) (x_1, y_1) বিন্দু হইতে $ax+by+c=0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য পাইতে হইলে, $ax+by+c$ রাশিমালাটিতে x এর পরিবর্তে x_1 এবং y এর পরিবর্তে y_1 বসাইয়া উহাকে x এর সহগের বর্গ এবং y এর সহগের বর্গের সমষ্টির বর্গমূল দ্বারা ভাগ করিতে হইবে।

(ii) যদি P বিন্দু সরলরেখাটির যে পার্শ্বে মূল বিন্দু অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে থাকে, তবে লম্বের দৈর্ঘ্য হইবে $p'-p$, অর্থাৎ, $x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p$; কিন্তু P বিন্দু, যদি রেখাটির যে পার্শ্বে মূল বিন্দু অবস্থিত সেই পার্শ্বে থাকে, তবে লম্বের দৈর্ঘ্য হইবে $p-p'$, অর্থাৎ $-(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p)$. সুতরাং, সাধারণভাবে লম্বের দৈর্ঘ্য লিখিতে হইলে, উহার পূর্বে $\pm$ চিহ্ন যুক্ত করা হয়।

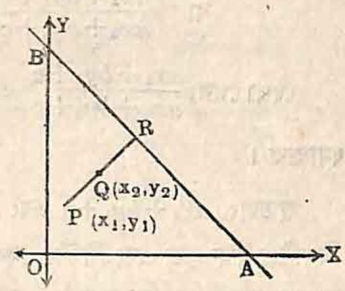
(iii) মূল বিন্দু হইতে যে কোন রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যকে সর্বদাই ধনাত্মক মনে করা হয়। এই কারণে মূল বিন্দু হইতে কোন রেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিবার সময় ধ্রুবক পদটিকে ধনাত্মক করিয়া লওয়া হয়। অপর যে কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিবার সময় ঐ একই নিয়ম অনুসরণ করা হইলে, অর্থাৎ ধ্রুবক পদটিকে ধনাত্মক করিয়া লইলে, মূল বিন্দুটি সরলরেখার যে দিকে অবস্থিত, নির্দিষ্ট বিন্দুটি সেইদিকে থাকিলে লম্বের দৈর্ঘ্য ধনাত্মক নতুবা ঋণাত্মক।

3·20. কোন প্রদত্ত সরলরেখার তুলনায় কোন বিন্দুর অবস্থান। **[To find the position of points in relation to a given straight line.]**

মনে কর, প্রদত্ত রেখা $\overleftrightarrow{AB}$ এর সমীকরণ $ax+by+c=0$. (26 নং চিত্রে), মনে কর, $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার উভয় পার্শ্বে অবস্থিত।



চিত্র 26



চিত্র 27

P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$কে যেন R বিন্দুতে ছেদ করিল। মনে কর, R বিন্দু $\overline{PQ}$কে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে,

$$\text{অর্থাৎ,} \quad \frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}=\frac{m}{n}.$$

$$\therefore \quad \text{R বিন্দুর স্থানাঙ্ক, } \left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right).$$

এখন, যেহেতু R বিন্দু $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad a\frac{mx_2+nx_1}{m+n} + b\frac{my_2+ny_1}{m+n}+c=0,$$

$$\text{বা,} \quad \frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}=-\frac{m}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(27 নং চিত্রে) মনে কর, $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত।

P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার বর্ধিতাংশ যেন $\overleftrightarrow{AB}$কে R বিন্দুতে ছেদ করিল। মনে কর, R বিন্দু $\overline{AB}$কে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে, অর্থাৎ $\frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}=\frac{m}{n}$.

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$.

এখন, যেহেতু R বিন্দু $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore\ a\frac{mx_2-nx_1}{m-n}+b\frac{my_2-ny_1}{m-n}+c=0,$$

$$\text{বা, }\quad \frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}=+\frac{m}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

দেখা গেল, $\dfrac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$ এই অনুপাতটি (1) এ ঋণাত্মক এবং (2) এ ধনাত্মক।

সুতরাং, ax_1+by_1+c এবং ax_2+by_2+c রাশিদ্বয় প্রথম ক্ষেত্রে পরস্পর বিপরীত চিহ্ন যুক্ত এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে একই চিহ্ন বিশিষ্ট হইবে।

অতএব, **(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $ax+by+c=0$ রেখার একই পার্শ্বে থাকিবে, যদি ax_1+by_1+c এবং ax_2+by_2+c রাশিদ্বয়ের চিহ্ন একই এবং বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে, যদি রাশিদ্বয়ের চিহ্ন পরস্পর বিপরীত হয়।**

দ্রষ্টব্য। প্রদত্ত সরলরেখার কোন্ পার্শ্বে বিন্দুটি অবস্থিত নির্ণয় করিতে হইলে, সরলরেখার যে পার্শ্বে মূল বিন্দু আছে, বিন্দুটি সেই পার্শ্বে অথবা উহার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত ইহাই নির্ণয় করিতে হয়।

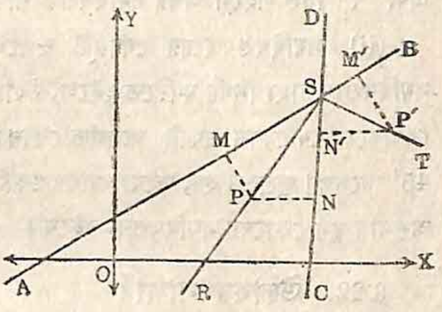
সমীকরণের রাশিমালায় মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0) এবং প্রদত্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক বসাইলে, যদি রাশিমালাটির চিহ্ন উভয় ক্ষেত্রে একই হয়, তবে রেখাটির যে পার্শ্বে মূল বিন্দু অবস্থিত প্রদত্ত বিন্দুটিও সেই পার্শ্বে থাকিবে। কিন্তু উহাদের চিহ্ন পরস্পর বিপরীত হইলে, প্রদত্ত বিন্দুটি, রেখাটির যে পার্শ্বে মূল বিন্দু অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে।

3·21. $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

[**To find the equations of the straight lines bisecting the angles between the lines $a_1x+b_1y+c_1=0$ and $a_2x+b_2y+c_2=0$.**]

মনে কর, প্রদত্ত রেখাদ্বয় যথাক্রমে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$; উহাদের ছেদবিন্দু S.

মনে কর, $\overrightarrow{SR}$ ও $\overrightarrow{ST}$ যথাক্রমে ঐ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক।



চিত্র 28

অন্তর্দ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{SR}$ এর উপর $P(x_1, y_1)$ যে কোন একটি বিন্দু লও। P বিন্দু হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ এর উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ ও $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন কর।

যেহেতু, দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা উহাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর যে কোন বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী, সুতরাং,

$$\overline{PM} = \overline{PN}.$$

চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, মূল বিন্দু O এবং P বিন্দু, $\overleftrightarrow{AB}$ বা $\overleftrightarrow{CD}$ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। সুতরাং, $\overline{PM}$ ও $\overline{PN}$ একই চিহ্নযুক্ত হইবে।

$$\therefore \quad \frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

আবার বহির্দ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{ST}$ এর উপর $P'(x_1, y_1)$ যে কোন বিন্দু লও। P′ হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ এর উপর যথাক্রমে $\overline{P'M'}$ ও $\overline{P'N'}$ লম্ব অঙ্কন কর। এখন মূল বিন্দু O এবং P′ বিন্দু $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার একই পার্শ্বে, কিন্তু $\overleftrightarrow{CD}$ রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। সুতরাং লম্বদ্বয় পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

$$\therefore \quad \overline{P'M'} = -\overline{P'N'}.$$

$$\therefore \quad \frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = -\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ বিন্দুর সঞ্চারপথ অর্থাৎ নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ

$$\frac{\mathbf{a_1x+b_1y+c_1}}{\sqrt{\mathbf{a_1^2+b_1^2}}} = \pm\frac{\mathbf{a_2x+b_2y+c_2}}{\sqrt{\mathbf{a_2^2+b_2^2}}}.$$

দ্রষ্টব্য। (i) c_1 এবং c_2 যদি একই চিহ্নযুক্ত হয় তবে, ডান পক্ষে '+' চিহ্ন লইলে, রেখাদ্বয় কর্তৃক উৎপন্ন যে কোণে মূল বিন্দু অবস্থিত, সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যাইবে এবং '−' চিহ্ন লইলে অপর সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যাইবে।

c_1 এবং c_2 যদি পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়, তবে ডানপক্ষে '−' চিহ্ন লইলে, মূল বিন্দু যে কোণে অবস্থিত সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যাইবে, এবং '+' চিহ্ন লইলে অপর সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যাইবে।

(ii) সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের কোন্‌টি সূক্ষ্মকোণের এবং কোন্‌টি স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক তাহা নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদের যে কোন একটি এবং প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের যে কোন একটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করিতে হইবে। যদি এই কোণ 45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে সমদ্বিখণ্ডকটি সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক হইবে এবং অন্যথায় স্থূল-কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইবে।

3·22. উদাহরণমালা।

উদা. 1. (2, 1) বিন্দু হইতে $3x+4y=5$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the length of the perpendicular from the (2, 1) upon the line $3x+4y=5$.]

$\therefore$ সূত্রানুসারে, লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore$ এখানে লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{3.2+4.1-5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{5}{5}=1.$

দ্রষ্টব্য। কখনও কখনও উপরের নিয়মে লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিলে, উহা ঋণাত্মক আসিবে। কিন্তু দৈর্ঘ্যকে সর্বদাই ধনাত্মক ধরা হয় বলিয়া উহার ধনাত্মক মান বা পরম মান (absolute value) কে নির্ণেয় দৈর্ঘ্য বলিয়া উল্লেখ করিতে হইবে।

উদা. 2. $3x-4y+7=0$ সরলরেখার কোন্ পার্শ্বে (2, 3) বিন্দুটি অবস্থিত ?

[On which side of the line $3x-4y+7=0$ does the point (2, 3) lie ?]

সমীকরণের রাশিমালাতে $x=0$, $y=0$ বসাইয়া পাই,

$3.0-4.0+7=+7$ (ধনাত্মক)

সমীকরণের রাশিমালাতে $x=2$, $y=3$ বসাইয়া পাই,

$3.2-4.3+7=+1$ (ধনাত্মক)

সুতরাং, (2, 3) বিন্দু সরলরেখাটির যে পার্শ্বে মূল বিন্দু (0, 0) অবস্থিত সেই পার্শ্বেই অবস্থিত।

উদা. 3. A$(0, -4)$ ও B$(-3, 1)$ বিন্দু দুইটি $6x+7y+12=0$ রেখার একই পার্শ্বে অথবা দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

[Find whether the points A$(0, -4)$ and B$(-3, 1)$ lie on the same side or on the opposite sides of the line $6x+7y+12=0$.]

সরলরেখার রাশিমালাতে $x=0$, $y=-4$ বসাইয়া পাই,

$6.0+7.(-4)+12=-16$, যাহা ঋণাত্মক।

আবার, $x=-3$, $y=1$, বসাইয়া পাই,

$6.(-3)+7.1+12=+1$, যাহা ধনাত্মক।

$\therefore$ A ও B বিন্দুদ্বয় প্রদত্ত রেখাটির দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, মূল বিন্দুটি $(4, 5)$, $(-4, 3)$ ও $(-1, -3)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভিতরে অবস্থিত।

[Prove that the origin lies inside the triangle whose vertices are $(4, 5)$, $(-4, 3)$ and $(-1, -3)$.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে A$(4, 5)$, B$(-4, 3)$ ও C$(-1, -3)$.

$\overline{AB}$ বাহুর সমীকরণ, $y-5=\dfrac{5-3}{4+4}(x-4)$,

বা, $x-4y+16=0$;

$\overline{BC}$ বাহুর সমীকরণ, $y-3=\dfrac{3+3}{-4+1}(x+4)$,

বা, $2x+y+5=0$;

এবং $\overline{CA}$ বাহুর সমীকরণ, $y+3=\dfrac{-3-5}{-1-4}(x+1)$,

বা, $8x-5y-7=0$.

এখন, A $(4, 5)$ হইতে $\overline{BC}$-এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য,

$$=\frac{2.4+1.5+5}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{18}{\sqrt{5}}.$$

মূল বিন্দু হইতে $\overline{BC}$-এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{2.0+1.0+5}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}.$$

উভয় লম্বের চিহ্নই ধনাত্মক ; সুতরাং, A(4, 5) এবং মূল বিন্দু $\overline{BC}$-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

B(−4, 3) হইতে $\overline{CA}$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{8(-4)-5(3)-7}{\sqrt{8^2+(-5)^2}}=-\frac{54}{\sqrt{89}};$$

মূল বিন্দু হইতে $\overline{CA}$-এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{8.0-5.0-7}{\sqrt{8^2+(-5)^2}}$

$$=\frac{-7}{\sqrt{89}}$$

উভয় লম্বের চিহ্নই ঋণাত্মক ; সুতরাং B(−4, 3) এবং মূল বিন্দু $\overline{CA}$ বাহুর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

C(−1, −3) হইতে $\overline{AB}$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{-1-4(-3)+16}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{27}{\sqrt{17}}$$

মূল বিন্দু হইতে $\overline{AB}$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{0-4.0+16}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{16}{\sqrt{17}}.$$

উভয় লম্বের চিহ্নই ধনাত্মক ; সুতরাং C(−1, −3) এবং মূল বিন্দু $\overline{AB}$ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত।

∴ মূল বিন্দু (4, 5), (−4, 3) ও (−1, −3) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভিতরে অবস্থিত।

উদা. 5. (7, −1) বিন্দু হইতে $3x-4y-5=0$, রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ; বিন্দুটি সরলরেখাটির কোন্ পার্শ্বে অবস্থিত ?

(7, −1) বিন্দু হইতে $3x-4y-5=0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{3\times 7-4(-1)-5}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4.$$

এখানে লম্বের চিহ্ন ধনাত্মক ; কিন্তু, প্রদত্ত রেখার ধ্রুবক পদটি (−5) ঋণাত্মক, অর্থাৎ উহারা পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

অতএব, প্রদত্ত সরলরেখার যে পার্শ্বে মূল বিন্দু অবস্থিত প্রদত্ত বিন্দুটি তাহার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

উদা. 6. $2y=3x-1$ ও $3y=2x+1$ সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**Find the equations of the bisectors of the angles between the lines $2y=3x-1$ and $3y=2x+1$.**]

সমীকরণদ্বয়কে নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায়,

$$3x-2y-1=0 \text{ ও } 2x-3y+1=0.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ,

$$\frac{3x-2y-1}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\pm\frac{2x-3y+1}{\sqrt{2^2+(-3)^2}},$$

বা, $3x-2y-1=\pm(2x-3y+1)$,

বা, $x+y-2=0$ এবং $x-y=0$.

উদা. 7. $8x-6y+11=0$ ও $12x-5y-6=0$ সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। মূল বিন্দু যে কোণে অবস্থিত সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক কোন্‌টি উল্লেখ কর।

সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ, $\dfrac{8x-6y+11}{\sqrt{8^2+6^2}}=\pm\dfrac{12x-5y-6}{\sqrt{12^2+5^2}}$,

বা, $13(8x-6y+11)=\pm10(12x-5y-6)$.

ডান পক্ষে '+' চিহ্ন লইলে একটি সমদ্বিখণ্ডক পাই,

$$16x+28y-203=0 \quad \cdots \quad \cdots\text{(i)}$$

এবং ডান পক্ষে '−' চিহ্ন লইলে অপর সমদ্বিখণ্ডক পাই,

$$224x-128y+83=0 \quad \cdots \quad \cdots\text{(ii)}$$

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের ধ্রুবক পদ দুইটি [$+11$ ও -6] বিপরীত চিহ্নযুক্ত। সুতরাং, ডান পক্ষে '−' চিহ্ন লইয়া যে সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া গিয়াছে উহাই উদ্দিষ্ট সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ যে কোণে মূল বিন্দু আছে সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইল,

$$224x-128y+83=0.$$

উদা. 8. $x=y$ ও $x+y=1$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। $(2, 1)$ বিন্দুটি যে কোণে অবস্থিত তাহার সমদ্বিখণ্ডক কোন্‌টি দেখাও।

[Find the equations of the bisectors of angles between the lines $x=y$ and $x+y=1$. Identify the bisector of the angle which includes the point $(2, 1)$.]

প্রদত্ত সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ হইল,

$$\frac{x-y}{\sqrt{1^2+1^2}}=\pm\frac{x+y-1}{\sqrt{1^2+1^2}},$$

বা, $x-y=\pm(x+y-1)$.

ডান পক্ষে '+' চিহ্ন লইয়া একটি সমদ্বিখণ্ডক পাই,

$$2y-1=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

আবার ডান পক্ষে '−' চিহ্ন লইয়া অপর সমদ্বিখণ্ডক পাই,

$$2x-1=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$(2, 1)$ বিন্দু হইতে $x+y-1=0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{2+1-1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$ (ইহা ধনাত্মক)

কিন্তু, $x+y-1=0$ এই সমীকরণের ধ্রুবক পদ (-1) ঋণাত্মক।

সুতরাং, $(2, 1)$ বিন্দুটি, $x+y-1=0$ রেখার যে পার্শ্বে মূল বিন্দু অবস্থিত, তাহার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত যে কোণের মধ্যে মূল বিন্দু নাই, সেই কোণের মধ্যে $(2, 1)$ বিন্দুটি অবস্থিত।

$\therefore$ নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল, $2y-1=0$.

উদা. 9. $x+y-3=0$ ও $7x-y+5=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উহাদের মধ্যে কোন্‌টি সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক তাহা স্থির কর।

[Find the equations of the bisectors of the angles between the lines $x+y-3=0$ and $7x-y+5=0$.

Find out that bisector which bisects the acute angle between the two lines.]

সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ হইল,

$x-3y+10=0$ ... ... (1) [ছাত্রদের ইহা বাহির করিয়া
এবং $6x+2y-5=0$ ... ... (2) দেখাইতে হইবে]

মনে কর, সমদ্বিখণ্ডক (2), $7x-y+5=0$ সরলরেখা এর সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \tan\theta=\frac{-3-7}{1+7(-3)}=\frac{1}{2}$$ [এখানে, $m_1=-3$ এবং $m_2=7$]

ইহা 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। সুতরাং, $\theta<45°$.

প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত যে কোণকে $6x+2y-5=0$ রেখা সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে, সেই কোণটি 2θ.

কিন্তু, যেহেতু $\theta<45°$, সুতরাং, $2\theta<90°$.

সুতরাং প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল, $6x+2y-5=0$.

প্রশ্নমালা (Exercise) 3C

1. (3, 4) বিন্দুটি $x-7y+2=0$ রেখার কোন পার্শ্বে অবস্থিত ?

[On which side of the line $x-7y+2=0$ does the point (3, 4) lie ?]

2. $(-1, 5)$ বিন্দুটি $7x-3y+2=0$ রেখার কোন্ পার্শ্বে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

[Find in which side of the line $7x-3y+2=0$ lies the point $(-1, 5)$.]

3. (3, 1), $(-4, -1)$ বিন্দুদ্বয় $6x+7y+12=0$ রেখার একই পার্শ্বে অথবা দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

[Find whether the points (3, 1), $(-4, -1)$ lie on the same side or on the opposite sides of the line $6x+7y+12=0$.]

4. $(1, 1)$ ও $(5, -3)$ বিন্দুদ্বয় $12x+13y-10=0$ রেখার একই পার্শ্বে অথবা দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

[Find whether the points $(1, 1)$ and $(5, -3)$ lie on the same side or on the opposite sides of the line $12x+13y-10=0$.]

5. $(4, 5)$ বিন্দু হইতে $3x-4y+6=0$ রেখার দূরত্ব নির্ণয় কর।

[Find the distance of the line $3x-4y+6=0$ from the point $(4, 5)$.]

6. মূল বিন্দু হইতে নিম্নের রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the perpendicular distance of the following line from the origin.]

(i) $3x-4y+20=0$;

(ii) $12x-5y-13=0$;

(iii) $6x+8y+9=0$.

7. দেখাও যে $(1, 1)$ বিন্দুটি $3x+4y=12$, $5x-12y+20=0$ এবং $4x-3y=6$ রেখাত্রয় হইতে সমদূরবর্তী।

[Show that the point $(1, 1)$ is equidistant from the lines $3x+4y=12$, $5x-12y+20=0$ and $4x-3y=6$.]

8. যদি একটি চলমান বিন্দু P হইতে $x+y-5=0$ ও $3x-2y+7=0$ সরলরেখা দুইটির উপর লম্বদ্বয়ের সমষ্টি সর্বদাই 10 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, P-কে একটি সরলরেখায় চলিতে হইবে।

[If the sum of the perpendiculars dropped from a variable point P on the two straight lines $x+y-5=0$ and $3x-2y+7=0$ be always equal to 10, prove that P must move on a right line.]

9. $(1,5)$, $(7, 2)$ ও $(4, 9)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের লম্ববিন্দু (orthocentre)-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the ortho centre of the triangle whose vertices are $(1, 5)$, $(7, 2)$ and $(4, 9)$.]

12. প্রমাণ কর যে মূল বিন্দুটি (2, 1), (3, −2) ও (4, −1) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভিতরে অবস্থিত।

[Prove that the origin lies inside the triangle whose vertices are (2, 1), (3, −2) and (4, −1).]

13. মূল বিন্দু হইতে যদি $x \sec\theta - y \operatorname{cosec}\theta = a$ এবং $x \cos\theta - y \sin\theta = a \cos 2\theta$ রেখাদ্বয়ের লম্ব-দূরত্ব যথাক্রমে p এবং p' হয় তবে প্রমাণ কর যে, $4p^2 + p'^2 = a^2$.

[If p and p' be the perpendiculars from the origin upon the lines $x \sec\theta - y \operatorname{cosec}\theta = a$ and $x \cos\theta - y \sin\theta = a \cos 2\theta$, prove that $4p^2 + p'^2 = a^2$.]

14. x-অক্ষস্থিত কোন্ বিন্দুগুলির $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখা হইতে লম্ব-দূরত্ব a-এর সমান ?

[What are the point on the axis of x whose perpendicular distance from the straight line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, is a ?]

15. $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 1)$ বিন্দুগামী যে রেখাদ্বয়ের মূল বিন্দু হইতে লম্ব-দূরত্ব 1, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Obtain the equations of the lines passing through the point $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 1)$ whose perpendicular distances from the origin is unity.]

16. (3, −2) বিন্দু হইতে $lx + my + n = 0$ রেখার লম্ব-দূরত্ব 5 হইবার সর্ত নির্ণয় কর।

[Find the condition that the perpendicular dropped from the point (3, −2) on the line $lx + my + n = 0$ may be of constant length 5.]

17. $4x + 3y - 13 = 0$ এবং $5x + 12y + 25 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations of the bisectors of the angles between the lines $4x + 3y - 13 = 0$ and $5x + 12y + 25 = 0$.]

18. $3x-4y+8=0$ এবং $12x+5y-15=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তগত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations of the bisectors of the angles between the lines $3x-4y+8=0$ and $12x+5y-15=0$.]

19. $4x-3y+1=0$ ও $12x-5y+7=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উহাদের মধ্যে কোন্‌টি সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক তাহা স্থির কর।

[Find out the equations of the bisectors of the angles between the two straight lines $4x-3y+1=0$ and $12x-5y+7=0$. Find out that bisector which bisects the acute angle between the two given straight lines.]

20. $3x-4y+7=0$ এবং $12x-5y-8=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত যে কোণে মূল বিন্দু অবস্থিত, সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয় কর।

[Find the bisector of the angle between the lines $3x-4y+7=0$ and $12x-5y-8=0$ which contains the origin.]

21. যে ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $3x+4y=6$, $12x-5y=3$, এবং $4x-3y+12=0$, উহার কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডকত্রয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the internal bisectors of the angles of the triangle whose sides are $3x+4y=6$, $12x-5y=3$ and $4x-3y+12=0$.]

22. $3x+y=11$ রেখা যে রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক তাহাদের একটি $x-8y+13=0$; অপরটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[The straight line $3x+y=11$ bisects the angle between a pair of lines of which one is $x-8y+13=0$. Find the equation of the other line.]

23. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি (0, 3), (0, −9) এবং (8, −3) উহার অন্তঃকেন্দ্র (in centre) নির্ণয় কর।

[Find the in-centre of the triangle whose vertices are (0,3) (0, −9) and (8, −3).]

24. $y=mx+c$ এবং $y=mx+d$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর।

[Find the perpendicular distance between the parallel straight lines $y=mx+c$ and $y=mx+d$.]

25. $3x+4y=6$ এবং $3x+4y+4=0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

[Find the distance between the parallel lines $3x+4y=6$ and $3x+4y+4=0$.]

26. একটি সরলরেখা $(-4, 9)$ বিন্দু দিয়া যায়; অক্ষদ্বয়ের মধ্যে সরলরেখাটির ছিন্ন অংশ যদি ঐ বিন্দুতে $3:2$ অনুপাতে বিভক্ত হয়, তবে দেখাও যে, উহার সমীকরণ $3x-2y+30=0$.

[A straight line passes through the point $(-4, 9)$ and is such that the portion of it intercepted between the axes is divided at the point in the ratio $3:2$. Show that the equation is $3x-2y+30=0$.]

27. $(a, b), (a', b')$ ও $(a-a', b-b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হইলে, দেখাও যে, উহাদের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়া যায় এবং $ab'=a'b$.

[If the points (a, b), (a', b'), $(a-a', b-b')$ are collinear, show that their join passes through the origin and that $ab'=a'b$.]

চতুর্থ অধ্যায়

বৃত্ত (Circle)

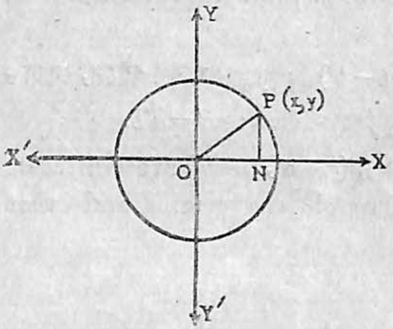
4·1. কোন চলমান বিন্দু অপর একটি স্থির বিন্দু হইতে সর্বদা সমান দূরত্ব বজায় রাখিয়া চলিলে, সে যে পথ সৃষ্টি করে তাহাকে **বৃত্ত** (circle) বলে।

স্থির বিন্দুটিকে বৃত্তের **কেন্দ্র** (centre) এবং সর্বদা সমান ঐ দূরত্বকে বৃত্তের **ব্যাসার্ধ** (radius) বলে।

4·2. বৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দুতে এবং ব্যাসার্ধ a হইলে, উহার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the circle whose centre is the origin and radius is a.]

বৃত্তের উপরে $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু লও। P হইতে $\overrightarrow{OX}$ এর উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন কর। $\overline{OP}$ যুক্ত কর।



চিত্র 29

তাহা হইলে,

$\overline{ON}=x$, $\overline{PN}=y$ এবং $\overline{OP}=a$.

এখন, OPN সমকোণী ত্রিভুজের,

$\overline{ON}^2+\overline{PN}^2=\overline{OP}^2$,

বা, $\mathbf{x^2+y^2=a^2}$.

ইহাই বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

4·3. কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (h, k) এবং ব্যাসার্ধ a হইলে, বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the circle whose centre is the point (h, k) and radius is a.]

মনে কর, C বৃত্তের কেন্দ্র। বৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু লও। $\overline{CP}$ যুক্ত কর। C ও P বিন্দু হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{CM}$ ও $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন কর।

পুনরায়, C হইতে $\overline{PN}$-এর উপর $\overline{CL}$ লম্ব অঙ্কন কর।

তাহা হইলে, $\overline{ON}=x$, $\overline{PN}=y$, $\overline{OM}=h$, $\overline{CM}=k$ এবং $\overline{CP}=a$.

এখন, $\overline{CL}=\overline{MN}=\overline{ON}-\overline{OM}=x-h.$

$\overline{PL}=\overline{PN}-\overline{LN}=\overline{PN}-\overline{CM}$

$=y-k.$

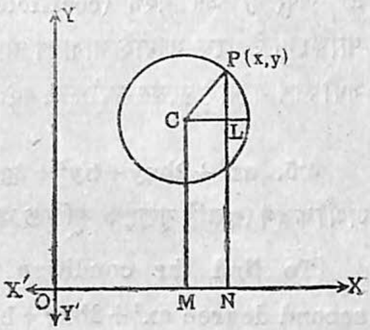
সমকোণী ত্রিভুজ PCL হইতে পাই,

$\overline{CL}^2+\overline{PL}^2=\overline{CP}^2,$

বা, $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2.$

$\therefore$ বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ হইল,

$$(\mathbf{x}-\mathbf{h})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{k})^2=\mathbf{a}^2.$$



চিত্র 30

4·4. $\mathbf{x^2+y^2+2gx+2fy+c=0}$, সমীকরণটি সর্বদাই একটি বৃত্তকে সূচিত করে।

[The equation $\mathbf{x^2+y^2+2gx+2fy+c=0}$, always represents a circle.]

প্রদত্ত সমীকরণ হইল, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$

বা, $x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c,$

বা, $(x+g)^2+(y+f)^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$

এখন, ইহাকে $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$, এর সহিত তুলনা করিয়া বুঝা যায় যে ইহা একটি বৃত্তকে সূচিত করে যাহার কেন্দ্র $\equiv(-g,-f)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}.$

দ্রষ্টব্য। (i) $g^2+f^2>c$ হইলে, $\sqrt{g^2+f^2-c}$ অর্থাৎ ব্যাসার্ধ বাস্তব হইবে; সুতরাং বৃত্তটি বাস্তব হইবে।

$g^2+f^2<c$ হইলে, $\sqrt{g^2+f^2-c}$ অর্থাৎ ব্যাসার্ধ কাল্পনিক হইবে; সুতরাং, বৃত্ত ও কাল্পনিক হইবে।

$g^2+f^2=c$ হইলে, $\sqrt{g^2+f^2-c}$ অর্থাৎ ব্যাসার্ধ শূন্য হইবে এবং বৃত্তটি একটি বিন্দু $(-g,-f)$ হইবে। এইরূপ বৃত্তকে **বিন্দুবৃত্ত** (point circle) বলা হয়।

(ii) $x^2+y^2+2xg+2fy+c=0$ সমীকরণটিকে **বৃত্তের সাধারণ**

সমীকরণ (general equation) বলা হয়। লক্ষণীয় যে, দ্বিঘাত সমীকরণে x^2 এবং y^2-এর সহগ (coefficient) সমান হইলে এবং xy বিশিষ্ট পদ না থাকিলে, উহাকে সর্বদাই সাধারণ আকারে প্রকাশ করা যায়; সুতরাং, এইরূপ সমীকরণ সর্বদাই বৃত্তের সমীকরণ হইবে।

4·5. $\mathbf{ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0}$, এই সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ একটি বৃত্তকে সূচিত করিবার সর্ত নির্ণয়।

[To find the condition that the general equation of the second degree $\mathbf{ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0}$ may represent a circle.]

প্রদত্ত সমীকরণ হইল, $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \cdots\cdots(1)$

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ হইল, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$

ইহার উভয় পক্ষকে k দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$kx^2+ky^2+2kgx+2kfy+kc=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) ও (2) তুলনা করিয়া পাই, $a=k,\ h=0,\ b=k$;

অর্থাৎ, $a=b$ এবং $h=0.$

অতএব নির্ণেয় সর্ত হইল, x^2 এর সহগ $=y^2$ এর সহগ, অর্থাৎ $\mathbf{a=b}$.

এবং xy এর সহগ $=0$, অর্থাৎ, $\mathbf{h=0}$.

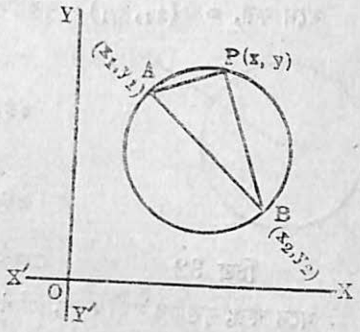
দ্রষ্টব্য। $a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$, সমীকরণটি সর্বদাই একটি বৃত্তের সমীকরণ।

4·6. $(\mathbf{x_1, y_1})$ ও $(\mathbf{x_2, y_2})$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা যে বৃত্তের ব্যাস, তাহার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the equation of the circle whose diameter is the line joining the two points $(\mathbf{x_1, y_1})$ and $(\mathbf{x_2, y_2})$.]

মনে কর, $A\equiv(x_1, y_1)$, $B\equiv(x_2, y_2)$ এবং $P(x, y)$ পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু।

$\overline{AB}$, $\overline{AP}$ ও $\overline{BP}$ যুক্ত কর।



চিত্র 31

এখন, $\overline{AP}$ এর gradient

$$=\frac{y-y_1}{x-x_1},$$

এবং $\overline{BP}$ এর gradient $=\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$

কিন্তু, $\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ;

সুতরাং, উহা সমকোণ।

অতএব, $\overline{AP} \perp \overline{BP}$.

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{x-x_1} \times \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1,$$

বা, $\quad (\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)+(\mathbf{y}-\mathbf{y}_1)(\mathbf{y}-\mathbf{y}_2)=\mathbf{0}.$

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

4·7 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$, $(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3)$ **তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।**

[To find the equation of the circle passing through three given points $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ and $(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3)$.]

মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

যেহেতু ইহা প্রদত্ত বিন্দুগুলি দিয়া যায়,

$$\therefore \quad x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

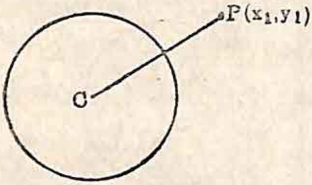
$$x_3^2+y_3^2+2gx_3+2fy_3+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

এখন, (2), (3) ও (4), g, f ও c বিশিষ্ট তিনটি একঘাত সমীকরণ। এই সহ-সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া g, f ও c এর মান নির্ণয় করা যাইবে। (1)-এ g, f ও c এর প্রাপ্ত মান বসাইলে, নির্ণেয় সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

4·8. কোন বিশেষ বিন্দু, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ, উপরস্থ কিংবা অন্তঃস্থ—তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

[To determine whether a particular point $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ is outside on or inside with respect to a given circle.]

মনে কর, $P \equiv (x_1, y_1)$; বৃত্তটির কেন্দ্র C এবং ব্যাসার্ধ $= a$. এখন,



চিত্র 32

$CP > a$ হইলে, P বিন্দুটি বৃত্তটির বহিঃস্থ হইবে।

$CP = a$ হইলে, P বিন্দুটি বৃত্তটির উপরস্থ হইবে।

$CP < a$ হইলে, P বিন্দুটি বৃত্তটির অন্তঃস্থ হইবে।

মনে কর, বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

তাহা হইলে, $C \equiv (-g, -f)$ এবং $a = \sqrt{g^2+f^2-c}$.

$\therefore \quad CP = \sqrt{(x_1+g)^2 + (y_1+f)^2}$.

এখন, P বিন্দুটি বৃত্তের বহিঃস্থ, উপরস্থ অথবা অন্তঃস্থ হইবে

যদি, $\quad CP \gtreqless a$ হয়,

অর্থাৎ যদি, $\quad \sqrt{(x_1+g)^2+(y_1+f)^2} \gtreqless \sqrt{g^2+f^2-c}$ হয়,

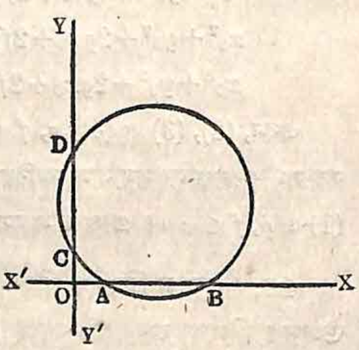
অর্থাৎ যদি, $(x_1+g)^2+(y_1+f)^2 \gtreqless (g^2+f^2-c)$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\mathbf{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \gtreqless 0}$ হয়।

দ্রষ্টব্য। প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণে x এবং y এর পরিবর্তে যথাক্রমে P এর ভুজ ও কোটি বসাইলে বাম পক্ষের রাশিমালা পাওয়া যাইবে।

4·9. $\mathbf{x^2+y^2+2gx+2fy+c=0}$, বৃত্তটি অক্ষদ্বয় হইতে যে অংশদ্বয় ছিন্ন করে, তাহাদের দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[To find the intercepts on the axes made by the circle $\mathbf{x^2+y^2+2gx+2fy+c=0}$.]



চিত্র 33

x-অক্ষের সমীকরণ, $y=0$.

সুতরাং, বৃত্তের সমীকরণে $y=0$ বসাইলে, বৃত্ত ও x অক্ষের ছেদ বিন্দু দ্বয়ের ভুজ পাওয়া যাইবে। $y=0$ বসাইয়া পাই,

$x^2+0+2gx+0+c=0$, বা, $x^2+2gx+c=0$.

ইহা x অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া ইহার দুইটি বীজ থাকিবে।

মনে কর, ঐ বীজদ্বয়, x_1 ও x_2.

$\therefore\ x_1+x_2=-2g$, এবং $x_1x_2=c$.

$\therefore$ x-অক্ষ হইতে ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য $=\overline{AB}=x_2-x_1$ [মনে করি]

$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4g^2-4c}=2\sqrt{g^2-c}$.

অনুরূপে, y-অক্ষ হইতে ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য $=2\sqrt{f^2-c}$.

4·10. উদাহরণমালা।

উদা. 1. যে বৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ 3 তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle whose centre is the origin and radius is 3.]

কেন্দ্র মূল বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ a হইলে, বৃত্তের সমীকরণ হয়,

$$x^2+y^2=a^2.$$

এখানে, $a=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2+y^2=3^2$, বা, $x^2+y^2=9$.

উদা. 2. (1, 1) বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দু, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle which passes through the point (1, 1) and whose centre is the origin.]

মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2+y^2=a^2$.

যেহেতু, ইহা (1, 1) বিন্দুগামী, $\therefore\ 1^2+1^2=a^2$, $\therefore\ a^2=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2+y^2=2$.

উদা. 3. যে বৃত্তের কেন্দ্র (2, 3) এবং ব্যাসার্ধ 4, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle whose centre is (2, 3) and radius is 4.]

নির্ণেয় সমীকরণ, $(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$.

বা, $x^2+y^2-4x-6y-3=0$.

উদা. 4. (2, 1) বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র (−1, 2), তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle whose centre is (−1, 2) and which passes through the point (2, 1).]

মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণ $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$.

এখানে, $h=-1$, ও $k=2$;

$\therefore$ সমীকরণ হইল, $(x+1)^2+(y-2)^2=a^2$.

যেহেতু, বৃত্তটি (2, 1) বিন্দুগামী, $\therefore$ $(2+1)^2+(1-2)^2=a^2$,

বা, $9+1=a^2$, বা, $a^2=10$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল, $(x+1)^2+(y-2)^2=10$,

বা, $x^2+y^2+2x-4y-5=0$.

উদা. 5. $x^2+y^2-4x-2y-4=0$, বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

[Find the centre and radius of the circle $x^2+y^2-4x-2y-4=0$.]

প্রদত্ত সমীকরণ হইল, $x^2+y^2-4x-2y-4=0$,

বা, $x^2-4x+4+y^2-2y+1=9$,

বা, $(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$.

$\therefore$ কেন্দ্র $\equiv(2, 1)$ এবং ব্যাসার্ধ $=3$.

বিকল্প পদ্ধতি।

প্রদত্ত সমীকরণ হইল,

$$x^2+y^2-4x-2y-4=0.$$

ইহাকে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সহিত তুলনা করিয়া পাই, $g=-2, f=-1$ এবং $c=-4$.

$\therefore$ কেন্দ্র $\equiv(-g, -f)\equiv(2, 1)$.

এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+4}=3$.

উদা. 6. (1, 1), (2, −1) ও (3, 2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle passing through the points (1, 1), (2, −1) and (3, 2).]

মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

যেহেতু ইহা (1, 1), (2, −1) এবং (3, 2) বিন্দু দিয়া যায়,

$\therefore\ 1^2+1^2+2g.1+2f.1+c=0,$

$2^2+(-1)^2+2g.2+2f(-1)+c=0,$

এবং $3^2+2^2+2g.3+2f.2+c=0,$

বা, $2g+2f+c=-2, \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

$4g-2f+c=-5, \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

এবং $6g+4f+c=-13. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই, $-2g+4f=3 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$

(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই, $-2g-6f=8 \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$

(4) হইতে (5) বিয়োগ করিয়া পাই, $10f=-5, \quad \therefore\ f=-\frac{1}{2},$

f এর মান (4) এ বসাইয়া পাই, $-2g-2=3,$ বা, $g=-\frac{5}{2},$

f এবং g এর মান (1) এ বসাইয়া পাই, $-5-1+c=-2,$ বা, $c=4.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল, $x^2+y^2+2(-\frac{5}{2})x+2(-\frac{1}{2})y+4=0,$

বা, $x^2+y^2-5x-y+4=0.$

উদা. 7. যে বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় (−2, −2) ও (4, −3), তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle the end points of one of whose diameters are (−2, −2) and (4, −3).]

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হইলে বৃত্তের সমীকরণ, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$

এখানে, $x_1=-2,\ x_2=4,\ y_1=-2,\ y_2=-3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল, $(x+2)(x-4)+(y+2)(y+3)=0.$

বা, $x^2-2x-8+y^2+5y+6=0,$

বা, $x^2+y^2-2x+5y-2=0.$

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, $(1, 1), (2, 0), (3, -3)$ ও $(-5, -7)$ একই বৃত্তস্থ এবং ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Show that the four points $(1, 1), (2, 0), (3, -3)$ and $(-5, -7)$ are concyclic and find the equation of the circle.]

মনে কর, $(1, 1)$, $(2, 0)$ ও $(3, -3)$ বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$

তাহা হইলে, ঐ স্থানাঙ্কগুলির দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad 2+2g+2f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$4+4g+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$18+6g-6f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(1), (2) ও (3) সমাধান করিয়া পাই, $g=2$, $f=3$ এবং $c=-12$.

$\therefore$ $(1, 1), (2, 0)$ ও $(3, -3)$ বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের সমীকরণ হইল,

$$x^2+y^2+2.2.x+2.3.y-12=0$$

বা, $x^2+y^2+4x+6y-12=0.$

ইহার বামপক্ষে $x=-5$ এবং $y=-7$ বসাইয়া পাই,

$$(-5)^2+(-7)^2+4(-5)+6(-7)-12=0.$$

অর্থাৎ, সমীকরণটি $(-5, -7)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ $(-5, -7)$ বিন্দুটিও ঐ বৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ এবং সেই বৃত্তের সমীকরণ হইল,

$$x^2+y^2+4x+6y-12=0.$$

উদা. 9. $(3, 4)$ ও $(-1, 2)$ বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র $x+y+2=0$ রেখার উপর অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle passing through the points $(3, 4)$ and $(-1, 2)$ and having its centre on the line $x+y+2=0$.]

মনে কর, বৃত্তটি, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$

ইহার কেন্দ্র $\equiv(-g, -f)$.

∴ বৃত্তটি (3, 4) এবং (−1, 2) বিন্দু দিয়া যায়,

∴ $25+6g+8f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

$5-2g+4f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

আবার, যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$, $x+y+2=0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore \quad -g-f+2=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

(1), (2) ও (3) সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া পাই,

$g=-3, f=1$ এবং $c=-15$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হইল, $x^2+y^2-6x+2y-15=0$.

উদা. 10 মূল বিন্দুগামী একটি বৃত্ত x ও y অক্ষ হইতে যথাক্রমে 4 ও 6-এর সমান অংশ ছিন্ন করিলে, উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle which passes through the origin and cuts off intercepts 4 and 6 from the x and y-axes respectively.]

মনে কর, মূল বিন্দুগামী বৃত্তটির কেন্দ্র C এবং উহা x-অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

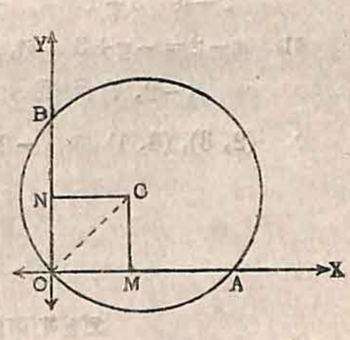
C হইতে $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ এর উপর যথাক্রমে $\overline{OM}$ ও $\overline{ON}$ লম্ব অঙ্কন কর।

এখন, $\overline{OA}=4$, $\overline{OB}=6$

যেহেতু, কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত লম্ব জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে

$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}=2$;

$\overline{ON}=\frac{1}{2}\overline{OB}=3$.



∴ কেন্দ্র C এর স্থানাঙ্ক (2, 3).

চিত্র 34

আবার, $\overline{OC}^2=\overline{OM}^2+\overline{CM}^2=2^2+3^2=13$.

∴ ব্যাসার্ধ $=\overline{OC}=\sqrt{13}$.

∴ বৃত্তটির সমীকরণ, $(x-2)^2+(y-3)^2=(\sqrt{13})^2$,

বা, $x^2+y^2-4x-6y=0$.

উদা. 11. (1, 3) বিন্দুগামী যে বৃত্ত $x^2+y^2-2x-10y-7=0$ বৃত্তের সহিত সমকেন্দ্রীয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equat,on of the circle concentric with the circle $x^2+y^2-2x-10y-7=0$ and passing through the point (1, 3).]

$x^2+y^2-2x-10y-7=0$ বৃত্তের সমকেন্দ্রীয় যে কোন বৃত্তের সমীকরণ হইল, $x^2+y^2-2x-10y+c=0$

এখন, যদি ইহা (1, 3) দিয়া যায়, তবে,

$$1^2+3^2-2.1-10.3+c=0\;;\quad \text{বা,}\quad c=22.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল, $x^2+y^2-2x-10y+22=0$.

উদা. 12. দেখাও যে, $x^2+y^2-4x-6y-5=0$, $x^2+y^2-8x-2y-8=0$ ও $x^2+y^2+4x-14y+11=0$ বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্রগুলি সমরেখ।

[Show that the centres of the circles $x^2+y^2-4x-6y-5=0$, $x^2+y^2-8x-2y-8=0$ and $x^2+y^2+4x-14y+11=0$ lie in one straight line.]

প্রদত্ত বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্রগুলি যথাক্রমে, (2, 3), (4, 1) এবং (−2, 7).

(2, 3) ও (4, 1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হইল,

$$\frac{x-2}{2-4}=\frac{y-3}{3-1},\ \text{বা,}\ \frac{x-2}{-2}=\frac{y-3}{2},$$

বা, $x-2=-y+3$; বা, $x+y=5$ $\cdots\quad\cdots$ (1)

(−2, 7) বিন্দুটি দ্বারা (1) সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ (2, 3), (4, 1) এবং (−2, 7) সমরেখ ; অর্থাৎ কেন্দ্রত্রয় সমরেখ।

প্রশ্নমালা (Exercise) 4

1. সেই বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর (Find the equation of the circle) :

(i) যাহার কেন্দ্র মূল বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ 8.

[Whose centre is the origin and radius is 8.]

(ii) যাহার কেন্দ্র (0, 3) এবং ব্যাসার্ধ 2.

[Whose centre is the point (0, 3) and radius is 2.]

(iii) যাহার কেন্দ্র (3, 5) এবং ব্যাসার্ধ 4.

[Whose centre is the point (3, 5) and radius is 4]

(iv) যাহার কেন্দ্র (−2, 5) এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{7}$.

[Whose centre is the point (−2, 5) and radius is $\sqrt{7}$.]

2. (13, 8) বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র (1, 3), তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর :

[Find the equation of the circle whose centre is the point (1, 3) and which passes through the point (13, 8).]

3. যে বৃত্তের কোন ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে (−4, 3) ও (12, −1) তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। y-অক্ষ হইতে এই বৃত্ত কি অংশ ছিন্ন করিবে ?

[The extremeties of a diameter of a circle have co-ordinates (−4, 3) and (12, −1) ; find the equation to the circle. What length does it intercept from the y-axis ?]

4. নিম্নের বৃত্তগুলির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :

[Find the centres of radii of the following circles.]

(i) $x^2+y^2=9$. (ii) $x^2+y^2=11$.

(iii) $x^2+y^2+2x+2y-23=0$.

(iv) $x^2+y^2-4x-10y+20=0$.

(v) $2x^2+2y^2+3x-5y+2=0$.

5. নিম্নের বিন্দুগুলি দিয়া যায় এইরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর (Find the equation of the circle which passes through the following points) :

(i) (3, 1), (14, −1), (11, 5) ;

(ii) (3, 4), (3, −6), (−1, 2) ;

(iii) (3, −4), (4, −1), (2, −2) ;

6. দেখাও যে, (0, 0), (1, 1), (5, −5) ও (6, −4) বিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ এবং ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Show that the four points (0, 0), (1, 1), (5, −5) and (6, −4) are concyclic and find the equation of the circle.]

7. দেখাও যে, (2, 0), (5, −3), (2, −6) এবং (−1, −3) বিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ এবং ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Show that the four points $(2, 0), (5, -3), (2, -6)$ and $(-1, -3)$ lie on a circle and find the equation of that circle.]

8. দেখাও যে, $x^2+y^2-2x+2y-7=0$, $x^2+y^2-6x-2y-6=0$, এবং $x^2+y^2-8x-4y-5=0$, বৃত্তগুলির কেন্দ্র এক সরলরেখায় অবস্থিত।

[Show that the centres of the circles $x^2+y^2-2x+2y-7=0$, $x^2+y^2-6x-2y-6=0$ and $x^2+y^2-8x-4y-5=0$ are collinear.]

9. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-2y-6=0$ এবং $x^2+y^2-12x+4y-9=0$ বৃত্তগুলির কেন্দ্র এক সরলরেখায় অবস্থিত এবং ব্যাসার্ধগুলি সমান্তর শ্রেণীতে আছে।

[Prove that the centres of the three circles, $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-2y-6=0$ and $x^2+y^2-12x+4y-9=0$ are collinear and that their radii are in A. P.]

10. $(3, -2)$ এবং $(-1, 6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle one of whose diameters is the line joining the points $(3, -2)$ and $(-1, 6)$.]

11. $(4, 3)$ ও $(-2, 5)$ বিন্দুদ্বয়গামী যে বৃত্তের কেন্দ্র $2x-3y=0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle passing through the points $(4, 3)$ and $(-2, 5)$ and having its centre on the line $2x-3y=0$.]

12. $(1, -2)$ ও $(4, -3)$ বিন্দুদ্বয়গামী যে বৃত্তের কেন্দ্র $3x+4y=7$ সরলরেখার উপর অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle passing through the points $(1, -2)$ and $(4, -3)$ and having its centre on the straight line $3x+4y=7$.]

13. মূল বিন্দুগামী যে বৃত্ত x এবং y-অক্ষ হইতে যথাক্রমে 3 ও 4 এর সমান অংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle which passes through

the origin and cuts off intercepts 3 and 4 from the x-and y-axes respectively.]

14. মূল বিন্দুগামী যে বৃত্ত x ও y অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিক হইতে যথাক্রমে 5 ও 3 অংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circles which passes through the origin and cuts off intercepts 5 and 3 from the positive sides of x and y axes respectively.]

15. $3x+y=14$ এবং $2x+5y=18$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র $(1, -2)$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle having its centre at $(1, -2)$ and passing through the point of intersection of the lines $3x+y=14$ and $2x+5y=18$.]

16. $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ বৃত্তটির সহিত সমকেন্দ্রীয় যে বৃত্ত $(5, -2)$ বিন্দুগামী, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle which is concentric with the circle $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ and passes through the point $(5, -2)$.]

17. $(-1, 2)$ বিন্দুগামী যে বৃত্ত $x^2+y^2+3x-4y+5=0$ বৃত্তের সহিত সমকেন্দ্রীয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle concentric with the circle $x^2+y^2+3x-4y+5=0$ and passing through the point $(-1, 2)$.]

18. একটি বৃত্ত $(0, 0)$ বিন্দু ও অক্ষদ্বয়ের সহিত $3x+4y=12$ রেখার ছেদ বিন্দুদ্বয় দিয়া গিয়াছে ; উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle passing through the origin and the points at which the straight line $3x+4y=12$ meets the axes.]

19. মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এইরূপ যে বৃত্ত, y অক্ষের উপর $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$ সরল রেখার সহিত মিলিত হয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle whose centre is at the

origin and which meets the straight line $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$ on the axis of y.]

20. x-অক্ষের উপর দুইটি বিন্দুর মূলবিন্দু হইতে দূরত্ব 2; সেই দুই বিন্দুগামী যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Obtain the equation of the circle which passes through the two points on the axis of x which are at a distance 2 from the origin and whose radius is 5.]

21. $x+y+1=0$, $3x+y-5=0$ এবং $2x+y-5=0$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির মধ্য দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle which passes through the vertices of the triangle formed by the lines $x+y+1=0$, $3x+y-5=0$ and $2x+y-5=0$.]

22. ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য a ; $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ কে দুইটি অক্ষ ধরিয়া প্রমাণ কর যে, ঐ বর্গের পরিবৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a(x+y)$ হইবে।

[ABCD is a square whose side is a ; taking $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AD}$ as axes. Prove that the equation to the circle circumscribing the square is $x^2+y^2=a(x+y)$.]

23 যে বৃত্ত x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে (1, 0) এবং (0, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Obtain the equation to the circle which touches the co-ordinate axes at (1, 0) and (0, 1).]

24. $x+y=6$, $2x+y=4$ এবং $x+2y=5$ সরলরেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle circumscribing the triangle formed by the lines $x+y=6$, $2x+y=4$ and $x+2y=5$.]

25. (1, 2) বিন্দুগামী যে বৃত্ত x-অক্ষকে (3, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle which touches the x-axis at the point (3, 0) and passes through the point (1, 2).]

26. $(-2, -3)$ বিন্দুগামী যে বৃত্ত উভয় অক্ষকেই স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle which touches both the axes and passes through the point $(-2, -3)$.]

27. যে বৃত্তের কেন্দ্র $(1, -3)$ এবং যাহা $2x-y-4=0$ রেখাকে স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle whose centre is the point $(1, -3)$ and touches the line $2x-y-4=0$.]

28. $(1, 2)$, $(3, -4)$ এবং $(5, -6)$ বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাস নির্ণয় কর।

মূলবিন্দু এই বৃত্তের ভিতরে না বাহিরে?

[Obtain the co-ordinates of the centre of the circle passing through the points $(1, 2)$, $(3, -4)$ and $(5, -6)$ and determine the length of its diameter.

Is the origin inside or outside the circle?]

29. দেখাও যে, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তটির $lx+my+n=0$ এবং $l'x+m'y+n'=0$ রেখাদ্বয় হইতে সমান দৈর্ঘ্য ছিন্ন করিবার সর্ত $(l'^2+m'^2)(lg+mf-n)^2=(l^2+m^2)(l'g+m'f-n')^2$.

[Show that the condition that the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ may intercept equal lengths on the lines $lx+my+n=0$ and $l'x+m'y+n'=0$ is $(l'^2+m'^2)(lg+mf-n)^2=(l^2+m^2)(l'g+m'f-n')^2$.]

[সংকেত: প্রদত্ত সরল রেখাদ্বয়কে প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী হইতে হইবে।]

30. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তে যে সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়, দেখাও যে তাহার ক্ষেত্রফল $\frac{3\sqrt{3}}{4}(g^2+f^2-c)$.

[Show that the area of the equilateral triangle inscribed in the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ is

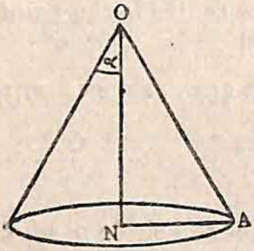
$$\frac{3\sqrt{3}}{4}(g^2+f^2-c).]$$

[সংকেত: কেন্দ্রের সহিত শীর্ষবিন্দুগুলি যুক্ত করিলে যে তিনটি ত্রিভুজ পাওয়া যায় তাহাদের প্রত্যেকের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}.r.r\sin 120°$.]

পঞ্চম অধ্যায়
কনিক সেক্‌সন্ (Conic sections)

5·1. শঙ্কু (cone)

একটি সমকোণী ত্রিভুজকে সমকোণ ধারক দুই বাহুর যে কোন একটির সাপেক্ষে আবর্তিত করাইলে যে জ্যামিতিক আকৃতি পাওয়া যায় তাহাকে **শঙ্কু** বা cone বলে। পার্শ্বের চিত্রে সমকোণী ত্রিভুজ ONA কে সমকোণ ধারক বাহুদ্বয়ের একটি $\overline{ON}$ এর সাপেক্ষে আবর্তিত করাইয়া একটি শঙ্কু বা cone পাওয়া গেল।



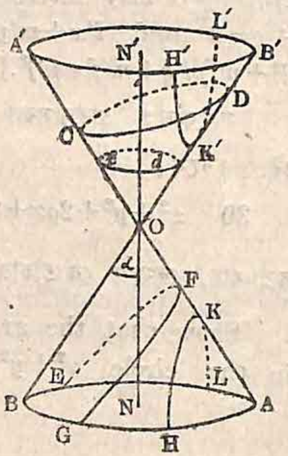
চিত্র 35

চিহ্নিত কোণ α কে বলে **অর্ধশীর্ষ কোণ** (Semi-vertical angle) এবং $\overline{ON}$ কে বলে cone এর অক্ষ (axis).

5·2 কনিক সেক্‌সন্ (Conic section)

ডবল শঙ্কু বা double cone কে সমতল দ্বারা ছিন্ন করিলে যে ছেদ (Section) পাওয়া যায়, তাহাকে **কনিক সেক্‌সন্** (Conic Section) বলে।

পার্শ্বের চিত্রে, একটি ডবল শঙ্কু (double cone) কে সমতল দ্বারা বিভিন্ন ভাবে ছিন্ন করিলে যে ছেদগুলি পাওয়া যায়, তাহা দেখান হইয়াছে।



চিত্র 36

সমতলটি (যাহা দ্বারা double cone কে ছিন্ন করা হইল), double cone এর অক্ষ NON′ এর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহা cone এর অর্ধশীর্ষ কোণ (semi-vertical angle) (i) α হইতে বৃহত্তর হইলে, ছেদ (section) কে বলা হয় **উপবৃত্ত** (ellipse) (ii) α এর সহিত সমান হইলে, ছেদ (section) কে বলা হয় **অধিবৃত্ত** (parabola) এবং (iii) α হইতে ক্ষুদ্রতর হইলে ছেদ (section) কে বলা হয় **পরাবৃত্ত** (Hyperbola).

যখন সমতলটি NON' এর সহিত লম্বভাবে ছেদ করে, তখন ছেদ (section) কে **বৃত্ত** বলা হয়। বৃত্ত, উপবৃত্তের একটি বিশেষ রূপ।

চিত্রে ছেদ CD একটি **উপবৃত্ত** cd একটি **বৃত্ত** (উপবৃত্ত)। EFG একটি **অধিবৃত্ত**: একই ছেদের দুইটি বিচ্ছিন্ন শাখা HKL এবং H'K'L' একটি **পরাবৃত্ত**।

যদি সমতলটি শীর্ষ বিন্দু O দিয়া যায়, তবে এক জোড়া সরলরেখাকে ছেদ হিসাবে পাওয়া যাইবে।

5·3. পূর্ব অনুচ্ছেদে বর্ণিত সমস্ত curve অর্থাৎ উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত বা পরাবৃত্ত একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে, যদি বিন্দুটি এইরূপ ভাবে চলে যে, একটি স্থির বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব এবং একটি স্থির রেখা হইতে উহার দূরত্বের অনুপাত সর্বদাই একটি ধ্রুবক হয়।

সুতরাং, conic section এর সংজ্ঞা নিম্নলিখিত ভাবে নির্দেশ করিতে হইবে—

"কোন সমতলের উপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট স্থির সরলরেখা হইতে ঐ সমতলের উপর চলমান কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত একটি ধ্রুবক হইলে, চলমান বিন্দুটির সঞ্চার পথকে conic section বা conic বলে।"

নির্দিষ্ট স্থির বিন্দুটিকে বলা হয় **কনিকের নাভি** (Focus of the conic)।

নির্দিষ্ট স্থির সরলরেখাকে বলা হয় **কনিকের নিয়ামক** (Directrix of the conic)।

দূরত্বদ্বয়ের ধ্রুবক অনুপাতকে বলা হয় **কনিকের উৎকেন্দ্রতা** (Eccentricity)। ইহা সাধারণতঃ e দ্বারা সূচিত হয় এবং দুইটি দূরত্বের অনুপাত বলিয়া ইহা কখনই ঋণাত্মক নয়। সাধারণতঃ ইহা ধনাত্মক; কেবলমাত্র, উপবৃত্তের বিশেষ রূপ বৃত্তের ক্ষেত্রে ইহা শূন্য।

1 অপেক্ষা বড়, ছোট বা 1 এর সহিত সমান e এর তিন প্রকার মান অনুসারে কনিককে তিন শ্রেণীতে বিভক্ত করা হয়—

(i) $e>1$ হইলে, কনিকটি **পরাবৃত্ত** (hyperbola),

(ii) $e<1$ হইলে, কনিকটি **উপবৃত্ত** (ellipse),

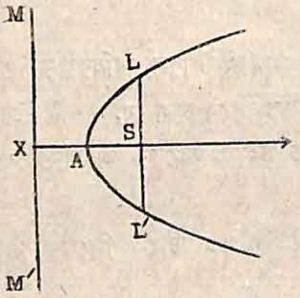
(iii) $e=1$ হইলে, কনিকটি **অধিবৃত্ত** (parabola).

নাভি হইতে নিয়ামকের উপর অঙ্কিত লম্ব রেখাকে বলা হয় **কনিকের অক্ষ** (axis of the conic).

যে বিন্দুতে কনিকের অক্ষ কনিককে ছেদ করে, তাহাকে বলা হয় **কনিকের শীর্ষবিন্দু** (vertex of the conic)।

নাভিতে অক্ষের উপর লম্ব জ্যা-কে বলে **কনিকের নাভিলম্ব** (Latus rectum)।

অধিবৃত্ত (Parabola)



চিত্র 37

5·4. পূর্বেই বলা হইয়াছে, যে, $e=1$ হইলে কনিককে অধিবৃত্ত (parabola) বলা হয়।

পার্শ্বের চিত্রে LOL′ একটি অধিবৃত্ত ; S উহার নাভি ; $\overleftrightarrow{MXM'}$ উহার নিয়ামক ; $\overrightarrow{XS}$ উহার অক্ষ ; A শীর্ষবিন্দু এবং $\overline{LSL'}$ নাভি লম্ব।

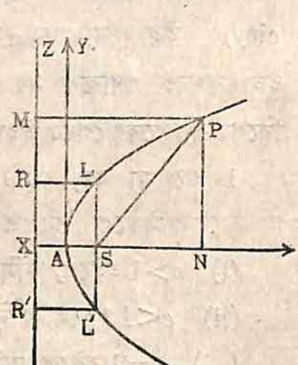
5·5. আদর্শ আকারে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়। (To find the equation of a parabola in the standard form.]

মনে কর, অধিবৃত্তের নাভিবিন্দু S এবং $\overleftrightarrow{MX}$ উহার নিয়ামক। S হইতে $\overleftrightarrow{MX}$-এর উপর $\overline{SX}$ লম্ব অঙ্কন কর। $\overline{SX}$ কে A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

মনে কর, $\overline{SA}=\overline{AX}=a$.

তাহা হইলে, A অধিবৃত্তের শীর্ষ (vertex) এবং $\overrightarrow{ASN}$ ইহার অক্ষ (axis)।

A কে মূলবিন্দু, বর্ধিত $\overleftrightarrow{XAS}$ কে x-অক্ষ এবং A বিন্দুগামী নিয়ামকের সহিত সমান্তরাল $\overrightarrow{AY}$ রেখাকে y-অক্ষ ধর।



চিত্র 38

তাহা হইলে, S এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x+a=0$ হইল।

মনে কর, $P(x, y)$ অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু। $\overline{SP}$ যোগ কর এবং P হইতে $\overleftrightarrow{MX}$ এর উপর $\overline{PM}$ লম্ব অঙ্কন কর।

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $\overline{SP}=\overline{PM}$,

বা, $\overline{SP}^2=\overline{PM}^2$,

বা, $(x-a)^2+y^2=(x+a)^2$,

বা, $x^2-2ax+a^2+y^2=x^2+2ax+a^2$,

বা, $\mathbf{y^2=4ax}$.

ইহাই অধিবৃত্তের সমীকরণের আদর্শ আকার।

দ্রষ্টব্য। **নাভিলম্ব**=নিয়ামকের সমান্তরাল নাভিবিন্দুগামী জ্যা

$$=\overline{LSL'}=\overline{SL}+\overline{SL'}=\overline{LR}+\overline{L'R'}$$
$$=\overline{XS}+\overline{XS}=2a+2a=4a.$$

সুতরাং, $y^2=4ax$ সমীকরণে, x-এর সহগই নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য।

আদর্শ আকারের অধিবৃত্তের সমীকরণের সহিত সম্পর্কিত নিম্নের ফলাফলগুলি স্মরণ রাখা প্রয়োজন :

(i) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0) ;

(ii) নাভিবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$;

(iii) নিয়ামকের সমীকরণ $x+a=0$;

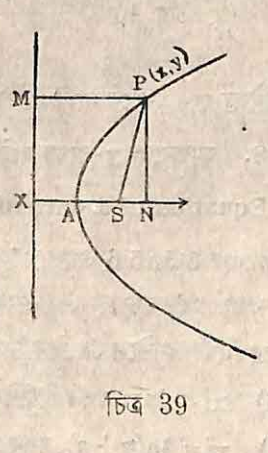
(iv) অক্ষের সমীকরণ $y=0$;

(v) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$;

(vi) নাভিলম্বের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় L ও L′ এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 2a)$ এবং $(a, -2a)$.

56. নাভিবিন্দুতে মূল বিন্দুর অবস্থান হইলে এবং অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষ হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the parabola when the focus is the origin and axis is the x-axis.]



চিত্র 39

এখানে মূলবিন্দু ≡ নাভিবিন্দু ≡ S

অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষ।

S বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের সহিত লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখাকে y-অক্ষ ধর।

তাহা হইলে, S বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)

মনে কর, $\overline{SX}=2a$.

অধিবৃত্তের উপরে P (x, y) যে কোন বিন্দু লও।

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$$\overline{SP}=\overline{PM}=\overline{XN}=2a+x.$$

বা, $\overline{SP}^2 = (2a+x)^2$

বা, $x^2+y^2=(2a+x)^2$

$\therefore \quad \mathbf{y^2=4a(x+a)}$

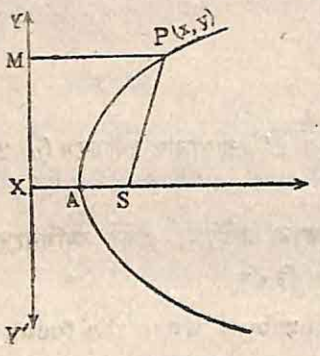
ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য। এখানে নিয়ামকের সমীকরণ, $x+2a=0$, এবং শীর্ষবিন্দু A এর স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$.

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$.

5·7. অক্ষ x-অক্ষ এবং নিয়ামক y-অক্ষ হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the parabola when the axis is the x-axis and directrix is the y-axis.]



চিত্র 40

এখানে, অধিবৃত্তের অক্ষই x-অক্ষ এবং নিয়ামক y-অক্ষ।

মনে কর, $P(x, y)$ অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু।

এখানে $\overline{XS}=2a$.

$\therefore$ S এর স্থানাঙ্ক $(2a, 0)$

এখন, $\overline{SP}^2=\overline{PM}^2$.

বা, $(x-2a)^2+y^2=x^2$,

বা, $\mathbf{y^2=4a(x-a)}$.

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য। এখানে নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$, অর্থাৎ x এর সহগ।

5·8. অক্ষকে y-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ।

[Equation of a parabola taking the axis as the y-axis.]

অনুচ্ছেদ 5·5, 5·6 এবং 5·7 এ অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ ধরিয়া সমীকরণ নির্ণয় করা হইয়াছে। ঐ একইভাবে, অক্ষকে y-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করিলে ঐ তিনটি সমীকরণ হইবে :—

(i) $\mathbf{x^2=4ay}$, যখন শীর্ষবিন্দু A কে মূলবিন্দু লওয়া হয়।

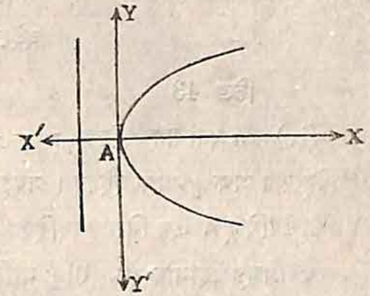
(ii) $\mathbf{x^2=4a(y+a)}$, যখন নাভি S কে মূলবিন্দু লওয়া হয়।

(iii) $\mathbf{x^2=4a(y-a)}$, যখন অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দুকে মূলবিন্দু লওয়া হয়।

5·9. অধিবৃত্তের আকৃতি [Shape of the parabola].

অধিবৃত্তের সাধারণ আকারের সমীকরণ হইল $y^2=4ax$.

যেহেতু y^2 সর্বদাই ধনাত্মক, সুতরাং, a ধনাত্মক হইলে x অবশ্যই ধনাত্মক হইবে। সুতরাং অধিবৃত্ত সম্পূর্ণভাবে AY এর ডানপার্শ্বে অবস্থিত হইবে।



চিত্র 41

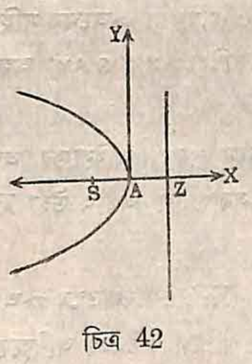
x এর যে কোন একটি মানের জন্য y এর দুইটি করিয়া মান থাকিবে। ইহারা সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট।

∴ অধিবৃত্ত নিজের অক্ষের সাপেক্ষে (এখানে x-অক্ষের সাপেক্ষে) প্রতিসম (Symmetric).

0 হইতে $+\infty$ এর মধ্যে যে কোন সংখ্যাই x এর মান হইতে পারে। x বাড়িতে থাকিলে y এর সাংখ্য মান (numerical value) ও বাড়িতে থাকে ; কিন্তু একটি ধনাত্মক আর একটি ঋণাত্মক। সুতরাং, অধিবৃত্তের x-অক্ষের উভয় দিকে অবস্থিত শাখাদ্বয় (branches) অসীম পর্যন্ত প্রসারিত।

5·10. অধিবৃত্তের সমীকরণ বিভিন্ন আকারের হইতে পারে। যথা—
(i) $\mathbf{y^2=4ax}$, (ii) $\mathbf{y^2=-4ax}$, (iii) $\mathbf{x^2=4ay}$, (iv) $\mathbf{x^2=-4ay}$.

(i) $\mathbf{y^2=4ax}$ আকারের সমীকরণ সম্পর্কে বিস্তৃত আলোচনা পূর্বেই করা হইয়াছে।

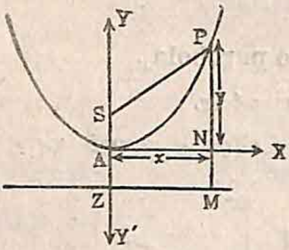


চিত্র 42

(ii) $\mathbf{y^2=-4ax}$, দ্বারা সূচিত অধিবৃত্ত সম্পূর্ণভাবে y অক্ষের বাম পার্শ্বে অবস্থিত হইবে। (এখানে a কে ধনাত্মক ধরা হইয়াছে)

ইহার শীর্ষ বিন্দু (0, 0), ইহার অক্ষ x-অক্ষ এবং ইহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$ (চিহ্ন বর্জিত x এর সহগ), নাভির স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$, এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x=-(-a)=a$; বা, $x-a=0$. অধিবৃত্তের বক্রতা (concavity) হইবে x অক্ষের ঋণাত্মক দিকে।

(iii) a ধনাত্মক হইলে $\mathbf{x^2=4ay}$ অধিবৃত্তটি সম্পূর্ণভাবে A শীর্ষবিন্দুর উপরের দিকে অবস্থিত হইবে।

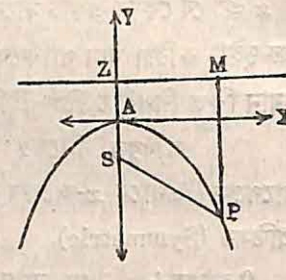


চিত্র 43

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0); ইহার অক্ষ y-অক্ষ; নাভির স্থানাঙ্ক হইবে $(0, a)$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য হইবে $4a$; নিয়ামকের সমীকরণ হইবে, $y+a=0$; এবং বক্রতা হইবে, y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে।

(iv) a ধনাত্মক হইলে, $\mathbf{x^2=-4ay}$ অধিবৃত্তের অক্ষ y-অক্ষ হইবে। সমগ্র অধিবৃত্তটি শীর্ষবিন্দু A এর নিম্নে অবস্থিত হইবে।

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0); নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$; নাভির স্থানাঙ্ক $(0, -a)$; নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $y=a$, বক্রতা হইবে y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে।



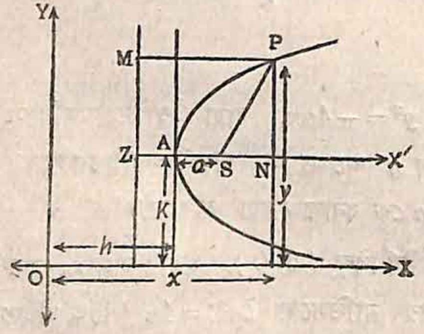
চিত্র 44

5·11. অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষ অথবা y-অক্ষের সমান্তরাল হইলে উহার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the parabola when the axis is parallel to x or y-axis.]

মনে কর, অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A এর স্থানাঙ্ক (h, k) এবং নাভিলম্ব $=4a$

এখন, x-অক্ষ ও y-অক্ষের সহিত সমান্তরাল করিয়া AX′ ও AY′ অঙ্কন কর।



চিত্র 45

(i) মনে কর, অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ উহা $\overrightarrow{AX'}$ বরাবর।

$\overrightarrow{AX'}$ ও $\overrightarrow{AY'}$ কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরিলে স্পষ্টতঃই অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $y^2=4ax$.

এখন, অক্ষদ্বয়ের দিক পরিবর্তন না করিয়া মূল বিন্দুকে A হইতে O বিন্দুতে

স্থানান্তরিত করিলে, $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে অধিবৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

যেহেতু, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k), অতএব $\overrightarrow{AX}'$ ও $\overrightarrow{AY}'$ অক্ষ হইলে O বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $(-h, -k)$.

সুতরাং, অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $\mathbf{(y-k)^2=4a(x-h)}$.
ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

(ii) যদি অধিবৃত্তের অক্ষ, y-অক্ষের সহিত সমান্তরাল অর্থাৎ $\overrightarrow{AY}'$ বরাবর হয়, তবে (i) এর অনুরূপ আলোচনা করিয়া $x^2=4ay$ সমীকরণটিতে x এবং y এর পরিবর্তে যথাক্রমে $x-h$ এবং $y-k$ বসাইলে নির্ণেয় সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\mathbf{(x-h)^2=4a(y-k)}$.

5·12. (i) $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$ এবং (ii) $\mathbf{x=ay^2+by+c}$ এর দ্বারা প্রকাশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the locus represented by (i) $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$, (ii) $\mathbf{x=ay^2+by+c}$.]

(i) $y=ax^2+bx+c$

বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\frac{y}{a}$,

বা, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{y}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{1}{a}\left(y+\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\ldots \quad \ldots(1)$

এখন, অক্ষদ্বয়ের দিক অপরিবর্তিত রাখিয়া মূল বিন্দুকে $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিলে, (i) সমীকরণটি $x^2=\frac{1}{a}y$ এ রূপান্তরিত হয়।

ইহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ যাহার শীর্ষবিন্দু নূতন মূলবিন্দু এবং অক্ষ নূতন y-অক্ষ হইবে।

সুতরাং, $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$ সমীকরণটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ, যাহার অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল, শীর্ষবিন্দু $\mathbf{\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)}$ এবং নাভিলম্ব$\mathbf{=\frac{1}{a}}$.

(ii) $x = ay^2 + by + c$ হইতে পাই,

$$\left(y+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(x+\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

অক্ষদ্বয়ের দিক পরিবর্তন না করিয়া মূল বিন্দুকে $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিলে উপরের সমীকরণটি $y^2 = \frac{1}{a}x$ এ রূপান্তরিত হয়।

ইহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ, যাহার শীর্ষবিন্দু নূতন মূলবিন্দু এবং অক্ষ নূতন x-অক্ষ।

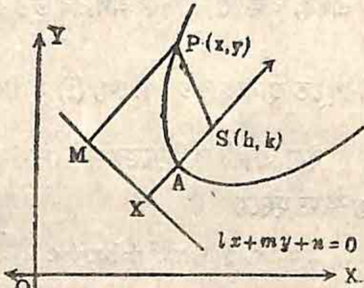
সুতরাং, $\mathbf{x = ay^2 + by + c}$ সমীকরণটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ যাহার অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, শীর্ষবিন্দু $\left(-\frac{\mathbf{b^2-4ac}}{\mathbf{2a}}, -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)$ এবং নাভিলম্ব $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}$.

5·13. অধিবৃত্তের নাভি ও নিয়ামকের সমীকরণ প্রদত্ত হইলে, উহার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the parabola when its focus and the equation of the directrix are given.]

মনে কর, নাভি S এর স্থানাঙ্ক (h, k) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $lx + my + n = 0$.

মনে কর, P(x, y) অধিবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু। P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব অঙ্কন কর।



চিত্র 46

এখন, $\overline{SP}^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

এবং $\overline{PM}^2 = \left\{\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right\}^2$

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$\overline{SP} = \overline{PM}$,

$\therefore \overline{SP}^2 = \overline{PM}^2$,

বা, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = \left\{\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right\}^2$,

বা, $(\mathbf{l}^2+\mathbf{m}^2)\{(\mathbf{x}-\mathbf{h})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{k})^2\}=(\mathbf{lx}+\mathbf{my}+\mathbf{n})^2 \quad \cdots \quad \cdots(1)$

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য। (i) সমীকরণ (1) কে অধিবৃত্তের **সাধারণ সমীকরণ** (general equation) বলা হয়।

(ii) সমীকরণ (1) কে সাজাইয়া লিখিয়া পাই,

$$(l^2+m^2)\{(x^2+y^2-2(hx+ky)+(h^2+k^2)\}-(lx+my)^2 \\ -2n(lx+my)-n^2=0,$$

বা, $$(l^2+m^2)(x^2+y^2)-(lx+my)^2-2x\{h(l^2+m^2)+nl\} \\ -2y\{k(l^2+m^2)+mn\}+(l^2+m^2)(h^2+k^2)-n^2=0,$$

বা, $$(mx-ly)^2-2x\{h(l^2+m^2)+nl\}-2y\{k(l^2+m^2)+mn\} \\ +(l^2+m^2)(h^2+k^2)-n^2=0.$$

অতএব, অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণের আকার হইবে

$$(\mathbf{ax}+\mathbf{by})^2+\mathbf{2gx}+\mathbf{2fy}+\mathbf{c}=\mathbf{0}.$$

সমীকরণটিতে x ও y এর দ্বিঘাত অংশ একটি পূর্ণবর্গরাশি রূপে আছে; সুতরাং x ও y এর দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ দ্বারা অধিবৃত্ত সূচিত হইলে, ইহার দ্বিঘাত পদত্রয় অর্থাৎ $ax^2+2hxy+by^2$ একটি পূর্ণবর্গ হইবে। আবার, $ax^2+2hxy+by^2$ একটি পূর্ণবর্গ হইলে, $h^2=ab$ হইবে।

অতএব, x ও y এর সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবার **প্রয়োজনীয় সর্ত** (necessary condition) হইল $h^2=ab$.

5·14. একটি অধিবৃত্তের সাপেক্ষে একটি বিন্দুর অবস্থান।
[Position of a point with respect to a parabola.]

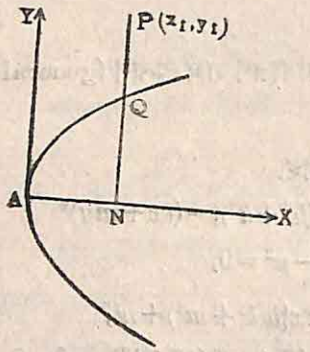
মনে কর, বিন্দুটি $P(x_1, y_1)$. P হইতে $\overline{AX}$ এর উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন কর। উহা যেন অধিবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

মনে কর, অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $y^2=4ax$.

P ও Q বিন্দুদ্বয়ের ভুজ একই এবং Q বিন্দুটি অধিবৃত্তের উপরে অবস্থিত।

অতএব, $\overline{QN}^2=4ax_1$.

এখন, P বিন্দুটি অধিবৃত্তের বাহিরে অবস্থিত হইবে



চিত্র 47

যদি, $\overline{PN}^2 > \overline{QN}^2$ হয় ;

P বিন্দুটি অধিবৃত্তের মধ্যে অবস্থিত হইবে

যদি, $\overline{PN}^2 < \overline{QN}^2$ হয় ;

P বিন্দুটি অধিবৃত্তের উপরে অবস্থিত হইবে

যদি, $\overline{PN}^2 = \overline{QN}^2$ হয় ।

অতএব, P বিন্দুটি অধিবৃত্তের বাহিরে, উহার উপর, অথবা উহার মধ্যে অবস্থিত হইবে যদি, $y_1{}^2 > = < 4ax_1$ হয় ।

5·15. একটি প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা ।

[The square of the ordinate of any point on a parabola is equal to the rectangle contained by the abscissa of the point and the latus rectum of the parabola.]

মনে কর, অধিবৃত্তের নাভি S, শীর্ষবিন্দু A, নিয়ামক $\overleftrightarrow{MZ}$ এবং অক্ষ $\overrightarrow{AX}$. অধিবৃত্তের উপরিস্থিত P যে কোন একটি বিন্দু । P হইতে অক্ষের উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন কর ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\overline{PN}^2 = 4.\overline{AS}.\overline{AN}$.

প্রমাণ । $\overline{SP}$ যুক্ত কর ; P হইতে নিয়ামকের উপর $\overline{PM}$ লম্ব অঙ্কন কর ।

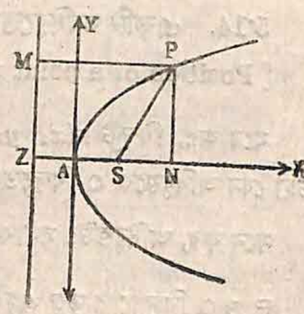
অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$$\overline{SP} = \overline{PM}.$$

আবার, $\overline{AZ} = \overline{AS}$.

এখন, PSN সমকোণী ত্রিভুজ হইতে পাই,

$$\begin{aligned}\overline{PN}^2 &= \overline{SP}^2 - \overline{SN}^2\\ &= \overline{PM}^2 - \overline{SN}^2\\ &= \overline{ZN}^2 - \overline{SN}^2\\ &= (\overline{AN} + \overline{AZ})^2 - (\overline{AN} - \overline{AS})^2\\ &= (\overline{AN} + \overline{AS})^2 - (\overline{AN} - \overline{AS})^2\\ &= 4\,\overline{AS}.\overline{AN}.\end{aligned}$$



চিত্র 48

5·16. উদাহরণমালা।

উদা. 1. নিম্নের প্রত্যেকটি অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, নাভি, নিয়ামকের সমীকরণ, নাভিলম্ব এবং অক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর (Find the vertex, focus, directrix, latus rectum and the axis of each of the following parabolas):

(i) $y^2=8x$.

(ii) $(y+1)^2=4(x+2)$.

(iii) $x^2-4x-2y+6=0$.

(i) প্রদত্ত সমীকরণ, $y^2=8x$

$y^2=4ax$ এর সহিত তুলনা করিয়া বুঝিতে পারি অধিবৃত্তের **শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক** $(0, 0)$, **অক্ষ** x-**অক্ষ**।

এখানে, $4a=8$, $\therefore$ $a=2$.

$\therefore$ **নাভির স্থানাঙ্ক** $(2, 0)$.

নিয়ামকের সমীকরণ : $x+a=0$, অর্থাৎ $x+2=0$.

নাভিলম্ব $=4a=4\times 2=8$.

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ হইল, $(y+1)^2=4(x+2)$, ইহা $\mathrm{Y}^2=4a\mathrm{X}$ আকার বিশিষ্ট।

এখানে $\mathrm{Y}=y+1$; $\mathrm{X}=x+2$ এবং $4a=4$, বা, $a=1$.

শীর্ষবিন্দু : $\mathrm{X}=0$, $\mathrm{Y}=0$; বা, $x+2=0$, $y+1=0$

বা, $x=-2$, $y=-1$, অর্থাৎ $(-2, -1)$,

নাভি : $\mathrm{X}=a$, $\mathrm{Y}=0$; বা, $x+2=1$, $y+1=0$

বা, $x=-1$, $y=-1$; অর্থাৎ $(-1, -1)$.

নিয়ামক : $\mathrm{X}=-a$, বা, $x+2=-1$, বা, $x=-3$.

নাভিলম্ব $=4a=4$.

অক্ষ : $\mathrm{Y}=0$, বা, $y+1=0$, বা, $y=-1$.

(iii) প্রদত্ত সমীকরণ হইল, $x^2-4x-2y+6=0$,

বা, $(x-2)^2=2(y-1)$

ইহা $\mathrm{X}^2=4a\mathrm{Y}$ আকার বিশিষ্ট।

এখানে, $\mathrm{X}=x-2$, $\mathrm{Y}=y-1$ এবং, $4a=2$, বা, $a=\frac{1}{2}$.

শীর্ষবিন্দু : $\mathrm{X}=0$, $\mathrm{Y}=0$; বা, $x-2=0$, $y-1=0$; অর্থাৎ $(2, 1)$.

নাভি : $X=0, Y=a$; বা, $x-2=0,\ y-1=\frac{1}{2}$, অর্থাৎ $(2, \frac{3}{2})$

নিয়ামক : $Y=-a$; বা, $y-1=-\frac{1}{2}$; বা, $y=\frac{1}{2}$; বা, $2y-1=0$.

নাভিলম্ব : $4a=2$.

অক্ষ : $X=0$, বা, $x-2=0$, বা, $x=2$.

উদা. 2. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তটি $(2, 1)$ বিন্দুগামী হইলে উহার নাভিলম্ব ও নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The parabola $y^2=4ax$ passes through the point $(2, 1)$; find the latus rectum and the co-ordinates of its focus.]

যেহেতু, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তটি $(2, 1)$ বিন্দুগামী,

অতএব, $1^2=4a.2=8a$, $\therefore\ a=\frac{1}{8}$.

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $y^2=4.\frac{1}{8}.x$, বা, $y^2=\frac{1}{2}x$.

এখানে, নাভিলম্ব $=4a=\frac{1}{2}$, $\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $\equiv(a, 0)\equiv(\frac{1}{8}, 0)$.

উদা. 3. $y^2=12x$ অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে বিন্দুর কোটি ভুজের দ্বিগুণ, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the co-ordinates of the point on the parabola $y^2=12x$ whose ordinate is twice its abscissa.]

মনে কর, নির্ণেয় বিন্দুটির ভুজ $=a$; তাহা হইলে কোটি $=2a$.

যেহেতু, $(a, 2a)$ বিন্দুটি প্রদত্ত অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত,

$\therefore\ (2a)^2=12a$, বা, $4a^2=12a$, বা, $4a(a-3)=0$,

$\therefore\ a=3$. $\quad [\because\ a\neq 0]$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুটির ভুজ 3 এবং কোটি $=2\times 3=6$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুটি $(3, 6)$.

উদা. 4. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের ডবল কোটির দৈর্ঘ্য $8a$ হইলে, প্রমাণ কর যে উহার শীর্ষবিন্দুর সহিত ঐ কোটির প্রান্তদ্বয়ের সংযোজক রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোনটি সমকোণ।

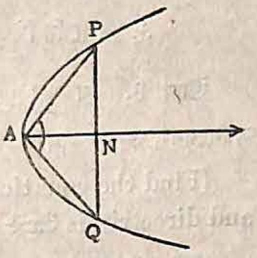
[A double ordinate of the parabola $y^2=4ax$ is of length $8a$. Prove that the lines joining the vertex to its ends are at right angles.]

[Double ordinate বা ডবল কোটি বলিতে নাভিলম্বের সমান্তরাল জ্যা-কে বুঝায়।]

মনে কর, $y^2=4ax$. অধিবৃত্তের $\overline{PQ}$ ডবল কোটি $=8a$. প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle PAQ=90^\circ$.

$\overline{PQ}$ অধিবৃত্তের অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন, $\overline{PN}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=4a$.

অর্থাৎ, P বিন্দুর কোটি $=4a$.



চিত্র 49

অধিবৃত্তের সমীকরণে $y=4a$ বসাইয়া পাই

$(4a)^2=4ax$, বা, $16a^2=4ax$,

বা, $4a(x-4a)=0$, $\therefore\ x=4a$.

$\therefore\ \overline{AN}=\overline{PN}=4a$.

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(4a, 4a)$ এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4a, -4a)$. A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$.

$$\therefore\ \overline{PA} \text{ রেখার gradient}=\frac{4a-0}{4a-0}=1.$$

$$\text{এবং } \overline{QA} \text{ রেখার gradient}=\frac{-4a-0}{4a-0}=-1.$$

$\therefore$ $\overline{PA}$ ও $\overline{QA}$ রেখাদ্বয়ের gradient-দ্বয়ের গুণফল $=1\times -1=-1$.

$\therefore$ $\overline{PA}$ ও $\overline{QA}$ পরস্পর লম্ব, অর্থাৎ $\angle PAQ=90^\circ$.

উদা. 5. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে বিন্দুর নাভি-দূরত্ব (focal distance) 4, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। নাভি-দূরত্ব 8 হইলে, ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কি হইবে?

[Find the co-ordinates of a point on the parabola $y^2=8x$ whose focal distance is 4. What will be the co-ordinates if the focal distance of the point on it be 8?]

মনে কর, $P(x, y)$ প্রদত্ত অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন একটি বিন্দু এবং অধিবৃত্তের নাভি S.

তাহা হইলে, P হইতে S এর দূরত্ব $=\overline{SP}=a+x$.

$\therefore\ 4=a+x$

যেহেতু, প্রদত্ত অধিবৃত্তের নাভিলম্ব $=4a=8$, $\therefore\ a=2$.

$\therefore\ 4=2+x$; বা, $x=2$.

আবার, $y^2=8x=8.2=16$, $\therefore\ y=\pm 4$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, \pm 4)$.

আবার, ঐ বিন্দু হইতে নাভির দূরত্ব 8 হইলে, $8=2+x$, $[\because a=2]$

$\therefore\ x=6$.

$\therefore\ y^2=8x=8.6=48$, $\therefore\ y=\pm 4\sqrt{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(6, \pm 4\sqrt{3})$.

উদা. 6. যে অধিবৃত্তের নাভি $(1, 1)$ বিন্দু ও নিয়ামক $3x+4y=5$ সরলরেখা, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the parabola whose focus is $(1, 1)$ and directrix is $3x+4y=5$.]

মনে কর, অধিবৃত্তটির উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু। নাভি S এর স্থানাঙ্ক $(1, 1)$. P হইতে নিয়ামকের উপর $\overline{PM}$ লম্ব, মনে কর।

তাহা হইলে, $\overline{SP}^2=(x-1)^2+(y-1)^2$,

এবং $\overline{PM}^2=\left(\dfrac{3x+4y-5}{\sqrt{3^2+4^2}}\right)^2=\dfrac{(3x+4y-5)^2}{25}$

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $\overline{SP}^2=\overline{PM}^2$,

$$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=\frac{(3x+4y-5)^2}{25},$$

বা, $x^2+y^2-2x-2y+2=\dfrac{9x^2+16y^2+24xy-30x-40y+25}{25}$,

বা, $25x^2+25y^2-50x-50y+50=9x^2+16y^2+24xy-30x-40y+25$,

বা, $16x^2+9y^2-24xy-20x-10y+25=0$.

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 7. যে অধিবৃত্তের শীর্ষ মূলবিন্দু এবং নাভি $(0, 5)$ বিন্দু, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the equation of the parabola whose vertex is the origin

and whose focus is the point (0, 5). Find the length of the latus rectum.]

মনে কর, অধিবৃত্তটির উপরিস্থিত $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু। নাভি S এর স্থানাঙ্ক (0, 5).

যেহেতু অধিবৃত্তের শীর্ষ এবং নাভি y-অক্ষের উপর অবস্থিত, সুতরাং, অধিবৃত্তের অক্ষ হইবে y-অক্ষ।

অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $y+5=0$.

মনে কর, P হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব $\overline{PM}$.

$$\therefore\ \overline{SP}^2=\overline{PM}^2, \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, $\overline{SP}^2=(x-0)^2+(y-5)^2=x^2+y^2-10y+25.$

এবং $\overline{PM}^2=(y+5)^2=y^2+10y+25.$

$\therefore$ (1) নং হইতে পাই, $x^2+y^2-10y+25=y^2+10y+25,$

বা, $x^2=20y$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

$\therefore$ নাভিলম্ব $=4a=20.$

উদা. 8. (6, 8) বিন্দুগামী যে অধিবৃত্তের শীর্ষ মূলবিন্দু তাহার অক্ষ যদি—

(i) x-অক্ষ হয়, (ii) y-অক্ষ হয়, তবে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the parabola whose vertex is at the origin and which passes through the point (6, 8),

(i) When the axis of the parabola is the x-axis.

(ii) When the axis of the parabola is the y-axis.]

(i) মনে কর অধিবৃত্তের সমীকরণ, $y^2=4ax$.

যেহেতু ইহা (6, 8) বিন্দুগামী,

$\therefore\ 8^2=4\times a\times 6$

বা, $64=24a$, $\therefore\ a=\frac{64}{24}=\frac{8}{3}.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $y^2=4.\frac{8}{3}x$, বা, $3y^2=32x$.

(ii) যেহেতু অধিবৃত্তের অক্ষ y-অক্ষ এবং শীর্ষ মূল বিন্দুতে, অতএব অধিবৃত্তের সমীকরণ $x^2=4ay$ আকার বিশিষ্ট হইবে।

যেহেতু, ইহা (6, 8) বিন্দুগামী,

$\therefore\ 6^2=4a\times 8,$ বা, $36=32a,$

$\therefore \quad a=\frac{36}{32}=\frac{9}{8}.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2=4\times\frac{9}{8}\times y$, বা, $2x^2=9y$.

উদা. 9 প্রমাণ কর যে $y^2+2ax+2by+c=0$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ, যাহার অক্ষটি x-অক্ষের সমান্তরাল। উহার শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর।

[Prove that the equation $y^2+2ax+2by+c=0$ represents a parabola whose axis is parallel to the axis of x. Find its vertex.]

প্রদত্ত সমীকরণ হইল, $y^2+2ax+2by+c=0$,

বা, $y^2+2by+b^2=b^2-2ax-c$,

বা, $(y+b)^2=-2a\left(x+\dfrac{c-b^2}{2a}\right)$,

বা, $(y+b)^2=4.-\frac{1}{2}a\left(x+\dfrac{c-b^2}{2a}\right)$,

ইহার আকার $(y-k)^2=4a(x-h)$ এর অনুরূপ।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ, যাহার অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল।

এখানে, $h=-\dfrac{c-b^2}{2a}=\dfrac{b^2-c}{2a}$, এবং $k=-b$.

$\therefore$ শীর্ষ $\equiv(h,\ k)\equiv\left(\dfrac{b^2-c}{2a},\ -b\right)$.

প্রশ্নমালা (Exercise) 5A

1. নিম্নের অধিবৃত্তগুলির প্রত্যেকটির শীর্ষবিন্দু, নাভি, নিয়ামকের সমীকরণ, নাভিলম্ব এবং অক্ষ নির্ণয় কর।

[Find the vertex, focus, directrix, latus rectum and the axis for each of the following parabolas]:—

(i) $y^2=9x$. (ii) $5y^2=3x$.

(iii) $x^2=12y$. (iv) $2x^2=3y$.

(v) $x^2+2y=0$. (vi) $(y+3)^2=2(x+2)$.

(vii) $x^2-6x-4y-11=0$.

(viii) $y^2+4x-6y+13=0$.

2. $y^2=4px$ অধিবৃত্তটি $(2, -3)$ বিন্দুগামী। ইহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The parabola $y^2=4px$ passes through the point $(2, -3)$. Obtain the length of the latus rectum and co-ordinates of its focus.]

3. $3x^2+12x-8y=0$ অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, নাভি, নাভিলম্ব এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the vertex, focus, the length of the latus rectum and the equation of the directrix of the parabola
$3x^2+12x-8y=0$.]

4. $y^2=8x$ অধিবৃত্তটির উপরিস্থিত যে বিন্দুর কোটি ভুজের দ্বিগুণ, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the co-ordinates of the point on the parabola $y^2=8x$ whose ordinate is twice its abscissa.]

5. নিম্নের অধিবৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর (Find the equations of the following parabolas) :—

(i) নাভিবিন্দু $(3, 0)$ এবং নিয়ামক $x=-3$.

(ii) নাভিবিন্দু $(0, 0)$ এবং নিয়ামক $x=-6$.

(iii) নাভিবিন্দু $(-6, 0)$ এবং নিয়ামক $x=0$.

(iv) নাভিবিন্দু $(0, 6)$ এবং নিয়ামক $y=0$.

(v) নাভিবিন্দু $(0, -3)$ এবং নিয়ামক $y=3$.

(vi) নাভিবিন্দু $(0, 0)$ এবং নিয়ামক $y=6$

6. নিম্নের অধিবৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর (Find the equations of the following parabolas) :—

(i) নাভিবিন্দু $(-1, 2)$ এবং নিয়ামক $x=-5$.

(ii) নাভিবিন্দু $(-1, -2)$ এবং নিয়ামক $x=3$

(iii) নাভিবিন্দু $(1, 1)$ এবং নিয়ামক $y=-3$.

(iv) নাভিবিন্দু $(-1, -2)$ এবং নিয়ামক $y=2$

7 অধিবৃত্তের নাভি $(2, 1)$ বিন্দু এবং নিয়ামক $4x-3y=1$ সরলরেখা হইলে, উহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the equation of the parabola whose focus is the point (2, 1) and whose directrix is the straight line $4x-3y=1$, and determine the length of its latus rectum.]

8. অধিবৃত্তের নাভি, মূলবিন্দু এবং নিয়ামক $2x+y-1=0$ সরলরেখা হইলে, উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the parabola whose focus is at the origin and whose directrix is the straight line $2x+y-1=0$.]

9. অধিবৃত্তের নাভি $(-1, 1)$ বিন্দু এবং নিয়ামক $x+y+1=0$ সরলরেখা হইলে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the equation to the parabola whose focus is the point $(-1, 1)$ and whose directrix is the straight line $x+y+1=0$, and determine the length of the latus rectum.]

10. $y^2=16x$ অধিবৃত্তটির উপরিস্থিত যে বিন্দুর কোটি ভুজের চতুর্গুণ, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the point on the parabola $y^2=16x$ whose ordinate is four times its abscissa.]

11. $y^2=2ax$ অধিবৃত্তটি $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী। ইহার নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The parabola $y^2=2ax$ passes through the point of intersection of the line $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ and $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$. Find the co-ordinates of its focus.]

12. $y^2=2mx$ অধিবৃত্তটি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এবং $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী। $a+b\neq 0$ হইলে, অধিবৃত্তটির নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর্।

[The parabola $y^2=2mx$ passes through the point of intersection of the lines $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ and $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, If $a+b\neq 0$, find the co-ordinates of the focus of the parabola.]

13. যে অধিবৃত্তের নাভি (2, 2) বিন্দু এবং যাহার অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দু $(1, -1)$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the parabola whose focus is (2, 2) and the point of intersection of the axis and the directrix is (1, −1).]

14. $y^2=18x$ অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে বিন্দুর কোটি উহার ভুজের তিনগুণ, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the co-ordinates of the point on the parabola $y^2=18x$ whose ordinate is thrice its abscissa.]

15. (3, 4) বিন্দুগামী যে অধিবৃত্তের শীর্ষ মূলবিন্দু তাহার অক্ষ যদি

(i) x-অক্ষ হয়, (ii) y-অক্ষ হয়,

তবে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the parabola whose vertex is at the origin and which passes through the point (3, 4),

(i) when the axis of the parabola is the x-axis,

(ii) when the axis of the parabola is the y-axis.]

16. যে অধিবৃত্তের শীর্ষ (2, 1) বিন্দু এবং নিয়ামক $y=2$ সরলরেখা, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the parabola whose vertex is (2, 1) and whose directrix is $y=2$.]

17. যে অধিবৃত্তের শীর্ষ (2, −3) বিন্দু, নাভিলম্ব 12 এবং অক্ষ $y+3=0$ সরলরেখা, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the parabola whose vertex is (2, −3), latus rectum equal to 12 and axis $y+3=0$.]

18. $x=ay^2+by+c$ অধিবৃত্তটি (0, 0), (2, 2) এবং (3, 4) বিন্দুগামী হইলে a, b এবং c এর মান নির্ণয় কর।

[If the parabola $x=ay^2+by+c$ passes through the points (0, 0), (2, 2) and (3, 4), find the value of a, b and c.]

19. $y^2=8x$ অধিবৃত্তটি উপরিস্থিত কোন বিন্দুর নাভি দূরত্ব (focal distance) 8 হইলে, বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The focal distance of a point on the parabola $y^2=8x$ is 8 find its co-ordinates.]

20. (i) (2,5), (ii) (2, 3) বিন্দুদ্বয় $y^2 = 8x$ অধিবৃত্তের ভিতরে কিংবা বাহিরে নির্ণয় কর।

[Examine whether the points (i) (2, 5) and (ii) (2, 3) are outside or inside the parabola $y^2 = 8x$.]

উপবৃত্ত (Ellipse)

5·17. যদি কোন চলমান বিন্দু কোন সমতলে এরূপভাবে চলিতে থাকে যে, ঐ সমতলস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু এবং নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে তাহার দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সর্বদা 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর একটি ধ্রুবক হয়, তবে ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে **উপবৃত্ত** (Ellipse) বলে।

নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে উপবৃত্তের **নাভি** (Focus), নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে উপবৃত্তের **নিয়ামক** (Directrix) এবং ধ্রুবকটিকে **উৎকেন্দ্রতা** (Eccentricity) বলে।

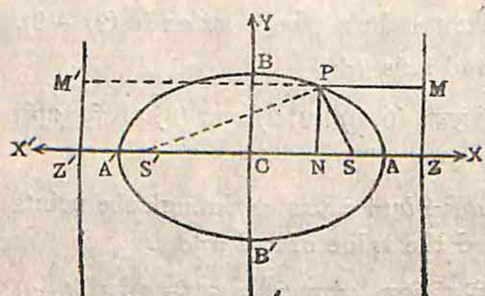
পূর্বেই বলা হইয়াছে, কনিকের উৎকেন্দ্রতাকে e দ্বারা সূচিত করা হয়। উপবৃত্তের ক্ষেত্রে, স্পষ্টতঃই $e<1$.

5·18. আদর্শ আকারে উপবৃত্তের সমীকরণ (Standard form of equation of an ellipse).

বা, নাভি, নিয়ামক ও উৎকেন্দ্রতা নির্দিষ্ট হইলে, উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the equation of an ellipse, given focus, directrix and eccentricity.]

মনে কর, উপবৃত্তের নাভি S, নিয়ামক $\overleftrightarrow{MZ}$ এবং উৎকেন্দ্রতা e; S হইতে $\overleftrightarrow{MZ}$ এর উপর $\overline{SZ}$ লম্ব অঙ্কন কর এবং $\overline{SZ}$ কে $e : 1$ অনুপাতে A বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত এবং A′ বিন্দুতে বহির্বিভক্ত কর।



চিত্র 50

$$\therefore \quad \frac{\overline{SA}}{\overline{AZ}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{A'Z}} = e \cdots (1)$$

উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, A ও A′ বিন্দুদ্বয় উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

মনে কর, $\overline{AA'}$ এর মধ্যবিন্দু C $\quad \therefore \ \overline{CA} = \overline{CA'}$

মনে কর, ইহাদের প্রত্যেকটি $=a$, অর্থাৎ, $\overline{CA}=\overline{CA'}=a$.

(1) হইতে পাওয়া যায়, $\overline{SA}+\overline{SA'}=e(\overline{AZ}+\overline{A'Z})$,

বা, $\overline{AA'}=e(\overline{CZ}-\overline{CA}+\overline{CZ}+\overline{CA'})=e.2\overline{CZ}$, $[\because \overline{CA}=\overline{CA'}]$

বা, $2a=2e.\overline{CZ}$,

$\therefore\ \overline{CZ}=\dfrac{a}{e}$ ....(2)

আবার, $\overline{SA'}-\overline{SA}=e(\overline{A'Z}-\overline{AZ})=e.\overline{AA'}$,

বা, $(\overline{CS}+\overline{CA'})-(\overline{CA}-\overline{CS})=2e.a$, বা, $2\overline{CS}=2ae$.

$\therefore\ \overline{CS}=ae$ ....(3)

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ, $x=\dfrac{a}{e}$.

এখন, C কে মূল বিন্দু, $\overrightarrow{CX}$কে x-অক্ষ এবং C বিন্দুতে CX রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত $\overrightarrow{CY}$ রেখাকে y-অক্ষ ধর।

মনে কর, P (x, y) উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু।

P হইতে $\overline{AA'}$ এর উপর $\overline{PN}$ এবং নিয়ামক $\overleftrightarrow{MZ}$ এর উপর $\overline{PM}$ লম্ব অঙ্কন কর।

তাহা হইলে, $\overline{CN}=x$, $\overline{PN}=y$.

উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $\overline{SP}=e.\overline{PM}$,

বা, $\overline{SP}^2=e^2.\overline{PM}^2$, ...(4)

কিন্তু, $\overline{SP}^2=\overline{SN}^2+\overline{PN}^2=(\overline{CS}-\overline{CN})^2+\overline{PN}^2=(ae-x)^2+y^2$,

এবং $\overline{PM}^2=\overline{NZ}^2=(\overline{CZ}-\overline{CN})^2=\left(\dfrac{a}{e}-x\right)^2=\dfrac{(a-ex)^2}{e^2}$

সুতরাং, (4) হইতে পাই, $(ae-x)^2+y^2=e^2.\dfrac{(a-ex)^2}{e^2}$,

বা, $a^2e^2-2aex+x^2+y^2=a^2-2aex+x^2$,

বা, $(1-e^2)x^2+y^2=a^2(1-e^2)$,

বা, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$ ....(5)

সমীকরণ (5) এ $x=0$ বসাইয়া পাই, $y=\pm a\sqrt{1-e^2}$,

সুতরাং, y-অক্ষ উপবৃত্তকে যে দুই বিন্দুতে (এখানে B ও B′) ছেদ করে, সেই বিন্দুদ্বয় C বিন্দুর উভয় পার্শ্বে উহা হইতে সমান দূরে অবস্থিত।

$\therefore\ \overline{CB}=\overline{CB'}=a\sqrt{1-e^2}$.

মনে কর, $\overline{CB}=\overline{CB'}=b$.

তাহা হইলে, $b^2=a^2(1-e^2)$.

অতএব, সমীকরণ (5) হইতে পাই, $\dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}+\dfrac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=\mathbf{1}$.

ইহাই আদর্শ আকারে উপবৃত্তের সমীকরণ।

5·19. কয়েকটি সংজ্ঞা।

পরাক্ষ রেখা (Line of major axis)—নাভি S হইতে নিয়ামকের উপর অঙ্কিত লম্ব $\overline{SZ}$ রেখাকে পরাক্ষ রেখা বলে।

উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (vertex of the ellipse)—পরাক্ষ রেখা উপবৃত্তকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে, উহাদেরকে উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু বলে। তাহা হইলে, A এবং A′ উপবৃত্তের দুইটি শীর্ষবিন্দু।

উপবৃত্তের কেন্দ্র (Centre of the ellipse)—$\overline{AA'}$ এর মধ্যবিন্দু C কে উপবৃত্তের কেন্দ্র বলে।

নাভিলম্ব (Latus rectum)—উপবৃত্তের নাভিগামী যে জ্যা পরাক্ষ রেখার উপর লম্ব তাহাকে উপবৃত্তের নাভিলম্ব বলে।

পরাক্ষ (Major axis)—দুই শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ $\overline{AA'}$ কে পরাক্ষ (major axis) বলে।

পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$.

উপাক্ষ (Minor axis)—উপবৃত্তের কেন্দ্রে পরাক্ষ রেখার উপর লম্ব রেখা উপবৃত্তকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে, উহাদের দূরত্বকে উপাক্ষ (minor axis) বলে।

তাহা হইলে, BB' উপাক্ষ, এবং উহার দৈর্ঘ্য $=2b$.

উৎকেন্দ্রতা (Eccentricity)—ইহার সংজ্ঞা পূর্বেই নির্দেশ করা হইয়াছে।

পূর্ব অনুচ্ছেদে আমরা দেখিয়াছি, $b^2=a^2(1-e^2)$,

$$\therefore\ e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2},$$

$$\therefore\ \text{উৎকেন্দ্রতা}=\mathbf{e}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2}$$

নাভি (Focus)—নাভির স্থানাঙ্ক **(ae, 0)**, যেহেতু, $\overline{\text{CS}}=ae$.

নিয়ামক (Directrix)—যেহেতু নিয়ামক y-অক্ষের সমান্তরাল, এবং $\overline{\text{CZ}}=\frac{a}{e}$, নিয়ামকের সমীকরণ :

$$x=\frac{a}{e} \quad \text{বা,} \quad ex=a.$$

5·20. প্রত্যেকটি উপবৃত্তের দুইটি নাভি এবং দুইটি নিয়ামক থাকে।

[Every ellipse has two foci and two directrices.]

অনুচ্ছেদ 5·18 এর চিত্রে $\overline{\text{CA}}'$ এর উপর এইরূপ ভাবে S′ বিন্দু লও যাহাতে $\overline{\text{CS}}'=\overline{\text{CS}}=ae$ হয়।

আবার, $\overline{\text{CA}}'$ এর বর্ধিতাংশের উপর Z′ বিন্দু লও যেন $\overline{\text{CZ}}'=\overline{\text{CZ}}=\frac{a}{e}$ হয়।

$\overline{\text{AA}}'$ এর বর্ধিতাংশের উপর $\overline{\text{Z}'\text{M}'}$ লম্ব এবং P বিন্দু হইতে $\overline{\text{Z}'\text{M}'}$ এর উপর $\overline{\text{PM}}'$ লম্ব অঙ্কন কর।

আমরা জানি, উপবৃত্তের সমীকরণ হইল,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1, \quad [\text{ অনু } 5'18 \text{ এবং (5) সমীকরণ দ্রষ্টব্য }]$$

বা, $x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2)$,

বা, $x^2-e^2x^2+y^2=a^2-a^2e^2$,

বা, $x^2+a^2e^2+y^2=e^2x^2+a^2$,

বা, $x^2+2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2+a^2+2aex$,

বা, $(x+ae)^2+y^2=e^2\left(\frac{a}{e}+x\right)^2$,

বা, $(\overline{\text{CN}}+\overline{\text{CS}})^2+\overline{\text{PN}}^2=e^2(\overline{\text{CZ}}'+\overline{\text{CN}})^2$,

বা, $\overline{\text{S}'\text{N}}^2+\overline{\text{PN}}^2=e^2.\overline{\text{PM}}'^2$,

বা, $\overline{\text{S}'\text{P}}^2=e^2.\overline{\text{PM}}'^2$,

$\therefore \quad \overline{\text{S}'\text{P}}=e.\overline{\text{PM}}'$.

সুতরাং, S' কে নাভি, Z'M' কে নিয়ামক এবং e কে উৎকেন্দ্রতা ধরিলে একই উপবৃত্ত পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ প্রত্যেক উপবৃত্তের দুইটি নাভি ও দুইটি নিয়ামক আছে।

দ্রষ্টব্য। (i) দ্বিতীয় নাভি S' এর স্থানাঙ্ক $(-\mathbf{ae}, \mathbf{0})$.

(ii) দ্বিতীয় নিয়ামক Z'M' এর সমীকরণ :

$$\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{e}} \quad \text{বা,} \quad \mathbf{ex} + \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

(iii) S $(ae, 0)$ কে মূলবিন্দু, পরাক্ষকে x-অক্ষ এবং পরাক্ষের উপর S বিন্দুগামী লম্বকে y-অক্ষ ধরিলে, উপবৃত্তের সমীকরণ হইবে,

$$\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{ae})^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{1}.$$

(iv) শীর্ষবিন্দু A $(a, 0)$ কে মূলবিন্দু, পরাক্ষকে x-অক্ষ এবং পরাক্ষের উপর A বিন্দুগামী লম্বকে y-অক্ষ ধরিলে উপবৃত্তটির সমীকরণ হইবে,

$$\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{a})^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{1}.$$

(v) Z $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ কে মূলবিন্দু এবং ZX ও ZM কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরিলে উপবৃত্তটির সমীকরণ হইবে,

$$\frac{\left(\mathbf{x}+\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{e}}\right)^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{1}.$$

5·21. উপবৃত্তের কয়েকটি ধর্ম (Some properties of ellipse).

(i) উপবৃত্তের সমীকরণ হইল, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

ইহা হইতে পাওয়া যায়, $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ... ...(1).

দেখা যাইতেছে যে, x এর একটি মানের জন্য y এর দুইটি করিয়া মান আছে এবং এই মান দুইটি সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

সুতরাং, **উপবৃত্ত পরাক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম**–

(ii) আবার, উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়,

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \quad \cdots \quad \cdots (2)$$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, y-এর একটি মানের জন্য x-এর দুইটি করিয়া মান আছে এবং এই মান দুইটি সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

সুতরাং, **উপবৃত্ত উপাক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।**

(iii) সমীকরণ (1) হইতে দেখা যায় যে, x-এর সাংখ্য মান a অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, y-এর মান কাল্পনিক হইবে।

সুতরাং, **উপবৃত্ত শীর্ষবিন্দুদ্বয় অর্থাৎ A এবং A′ এর বাহিরে যাইবে না।**

সমীকরণ (2) হইতে দেখা যায় যে, y-এর সাংখ্য মান b অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারিবে না।

সুতরাং, **উপবৃত্ত B, B′-এর বাহির যাইবে না।**

সুতরাং, **উপবৃত্ত একটি আবদ্ধ বক্ররেখা (Closed curve).**

(iv) সমীকরণ (1) হইতে দেখা যায় যে, $x=a$ বা $-a$ হইলে y-এর মান দুইটি সমান এবং শূন্য হয়।

সুতরাং, $x=a$ এবং $x=-a$ সরল রেখাদ্বয় উপবৃত্তের দুই শীর্ষ বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক।

(v) সমীকরণ (2) হইতে দেখা যায় যে, $y=+b$ বা, $-b$ হইলে x-এর মানদ্বয় সমান এবং শূন্য হয়।

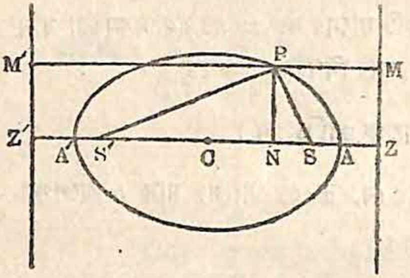
সুতরাং, $y=b$ এবং $y=-b$ রেখাদ্বয় উপবৃত্তের উপাক্ষের দুই প্রান্তবিন্দুতে দুইটি স্পর্শক।

(vi) উপবৃত্তের কোন বিন্দু উল্লিখিত চারিটি স্পর্শক দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের বাহিরে থাকিবে না।

(vii) $P(x, y)$ বিন্দুটি উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হইলে $(-x, -y)$ বিন্দুটিও উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হইবে, যেহেতু, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}$.

5·22. উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর নাভিদ্বয় হইতে দূরত্ব দুইটির সমষ্টি পরাক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।

[The sum of the focal distances of a point on an ellipse is equal to the major axis.]



চিত্র 51

মনে কর, P উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু। $\overline{MZ}$ এবং $\overline{M'Z'}$ দুইটি নিয়ামক, S ও S′ দুইটি নাভি।

$\overline{MM'}$, P বিন্দুগামী এবং নিয়ামক-দ্বয়ের উপর লম্ব।

এখন, $\overline{SP}+\overline{S'P}=e.\overline{PM}+e.\overline{PM'}$

$=e.(\overline{PM}+\overline{PM'})=e.\overline{MM'}=e.2\overline{CZ}$

$=2e.\overline{CZ}=2a=$ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য।

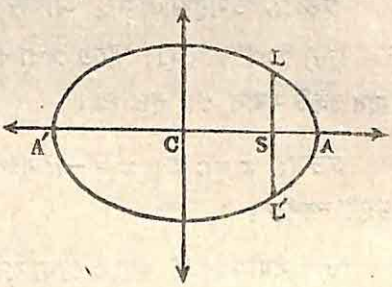
5·23. নাভিলম্ব (Latus rectum)

মনে কর, $\overline{LSL'}$ নাভিলম্ব। যেহেতু, S-এর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$,

∴ L-এর স্থানাঙ্ক হইবে, $(ae, \overline{SL})$

আবার, যেহেতু, L, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1$,

এর উপর অবস্থিত,



চিত্র 52

$$\therefore \quad \frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{\overline{SL}^2}{b^2}=1,$$

বা, $\frac{\overline{SL}^2}{b^2}=1-e^2,$

বা, $\overline{SL}^2=b^2(1-e^2)$

$$=b^2.\frac{b^2}{a^2}\ [\because\ b^2=a^2\ (1-e^2)]$$

$$=\frac{b^4}{a^2},$$

$$\therefore\ \overline{SL}=\frac{b^2}{a}.$$

∴ **নাভিলম্ব** $=\overline{LSL'}=2\overline{SL}=\frac{2b^2}{a}.$

5·24. প্রমাণ করিতে হইবে যে (**to prove that**),

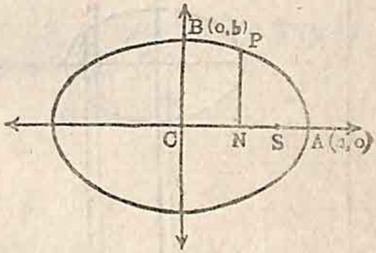
$$\overline{PN}^2 : \overline{AN}.\overline{A'N} :: \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2.$$

উপবৃত্তের সমীকরণ, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, হইতে পাই,

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}=\frac{(a+x)(a-x)}{a^2}.$$

$$\therefore\ \frac{\overline{PN}^2}{b^2}=\frac{\overline{A'N}\ \overline{AN}}{a^2},$$

$$\therefore\ \frac{\overline{PN}^2}{\overline{A'N}.\overline{AN}}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}.$$



চিত্র 53

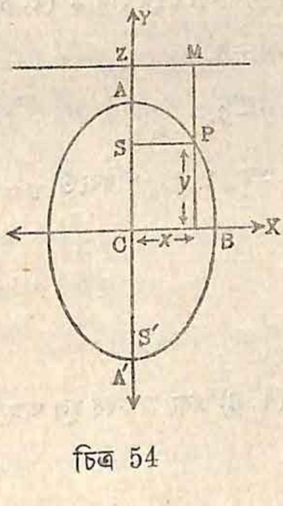
5·25. উপবৃত্তের পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর হইলে উহার সমীকরণ নির্ণয়।

[**To** find the equation of the ellipse whose major axis is along the axis of y.]

এখানে নাভি S এর স্থানাঙ্ক হইবে $(0, ae)$.

$$\therefore\ \overline{SP}^2=e^2.\overline{PM}^2,$$

$$\therefore\ (x-0)^2+(y-ae)^2=e^2\left(\frac{a}{e}-y\right)^2,$$



বা, $\dfrac{x^2}{a^2(1-e^2)}+\dfrac{y^2}{a^2}=1,$

বা, $\dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{b}^2}+\dfrac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{a}^2}=\mathbf{1},$

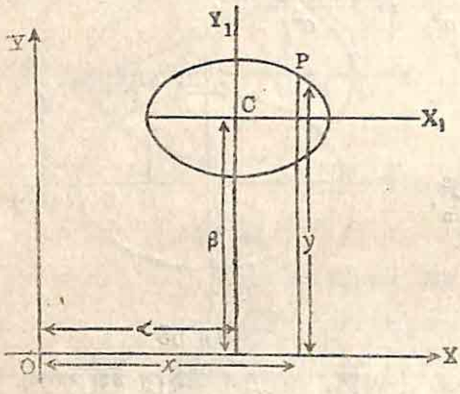
ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য। এই উপবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm ae)$ এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইবে, $y=\pm\dfrac{a}{e}$.

চিত্র 54

5·26. উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষ যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষের সমান্তরাল হইলে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of an ellipse whose axes are parallel to the axes of co-ordinates.]



চিত্র 55

মনে কর, উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষ $\overrightarrow{CX_1}$ ও $\overrightarrow{CY_1}$ বরাবর অবস্থিত এবং উহারা অক্ষদ্বয় $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ এর সমান্তরাল।

মনে কর, P (x, y) উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু।

মূল বিন্দু C এবং অক্ষদ্বয় যথাক্রমে $\overrightarrow{CX_1}$ এবং $\overrightarrow{CY_1}$ হইলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক, মনে কর, (X, Y).

যদি উপবৃত্তের পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$ এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b$ হয়, তবে উপবৃত্তের সমীকরণ হইবে,

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

মনে কর, মূল অক্ষদ্বয় OX এবং OY এর সাপেক্ষে C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

তাহা হইলে, $x=X+\alpha$ এবং $y=Y+\beta$,

$\therefore$ $X=x-\alpha$, এবং $Y=y-\beta$.

এখন সমীকরণ (1) এ X এর পরিবর্তে $x-\alpha$ এবং Y এর পরিবর্তে $y-\beta$ বসাইলে উপবৃত্তের সমীকরণ হইবে,

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1.$$

ইহাই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ যাহার কেন্দ্র (α, β) এবং অক্ষদ্বয় মূল অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল।

5·27. উপবৃত্তের নাভি (α, β) বিন্দু, নিয়ামকের সমীকরণ $lx+my+n=0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $e(<1)$ হইলে, উহার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the ellipse, whose focus is (α, β), directrix $lx+my+n=0$ and eccentricity $e(<1)$.]

মনে কর, উপবৃত্তের উপরিস্থিত P (x, y) যে কোন বিন্দু; S উপবৃত্তের নাভিবিন্দু এবং PM, P হইতে নিয়ামকের উপর অঙ্কিত লম্ব।

সংজ্ঞানুসারে $\overline{SP}=e.\overline{PM}$,

বা, $\overline{SP}^2=e^2.\overline{PM}^2$

এখন, $\overline{SP}^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$,

এবং, $\overline{PM}^2=\left(\dfrac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2.\frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2} \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

দ্রষ্টব্য। সমীকরণ (1) কে সরল করিলে $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ আকার বিশিষ্ট হইবে এবং দেখা যাইবে যে $h^2<ab$ হইবে।

$\therefore$ $h^2<ab$ দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণের উপবৃত্ত সূচিত করিবার প্রয়োজনীয় সর্ত।

5·28 আদর্শ আকারের উপবৃত্তের সমীকরণ সম্বন্ধীয় যে বিভিন্ন ফলগুলি সর্বদা স্মরণ রাখা প্রয়োজন, তাহা নিম্নে দেওয়া হইল :

(1) উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

(2) শীর্ষদ্বয় A $(a, 0)$ এবং A$'(-a, 0)$.

(3) কেন্দ্র$\equiv$C$(0, 0)$

(4) নাভিদ্বয় S$(ae, 0)$ এবং S$'(-ae, 0)$.

(5) Z ও Z$'$ এর স্থানাঙ্ক $\left(\pm\dfrac{a}{e}, 0\right)$.

(6) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য$=2a$.

(7) উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b$.

(8) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{2b^2}{a}$.

(9) $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$.

(10) পরাক্ষের সমীকরণ, $y=0$.

(11) উপাক্ষের সমীকরণ, $x=0$.

(12) নিয়ামকের সমীকরণ, $x=\pm\dfrac{a}{e}$.

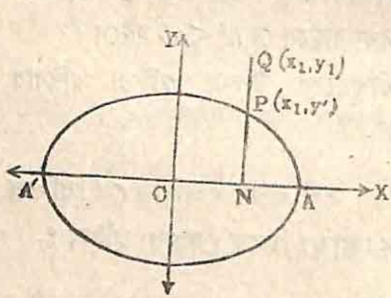
(13) নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ, $x=\pm ae$.

(14) নাভিলম্বদ্বয়ের দূরত্ব $=SS'=2ae$.

5·29. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের সাপেক্ষে (x_1, y_1) বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়।

[To find the position of a point (x_1, y_1) with respect to the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.]

মনে কর, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ; Q হইতে $\overline{AA'}$ এর উপর $\overline{QN}$ লম্ব অঙ্কন কর। $\overline{QN}$ উপবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।



চিত্র 56

তাহা হইলে, P বিন্দুর ভুজ $=x_1$; মনে কর, P এর কোটি $=y'$.

সুতরাং, P এর স্থানাঙ্ক (x_1, y').

যেহেতু, P বিন্দু উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

$$\therefore \quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

বা, $\dfrac{y'^2}{b^2}=1-\dfrac{x_1^2}{a^2}$.

এখন, Q বিন্দু উপবৃত্তের বহিঃস্থ, উপরিস্থিত অথবা মধ্যস্থ হইবে

যদি, $\overline{QN}^2 >=$ অথবা $< \overline{PN}^2$ হয়,

অর্থাৎ যদি $y_1^2 > =$ অথবা $< y'^2$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\dfrac{y_1^2}{b^2} > =$ অথবা $< \dfrac{y'^2}{b^2}$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\dfrac{y_1^2}{b^2} > =$ অথবা $< 1 - \dfrac{x_1^2}{a^2}$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} - 1 > =$ অথবা < 0 হয়।

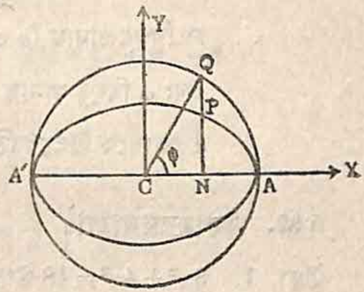
5·30. সহায়ক বৃত্ত (Auxiliary circle)

উপবৃত্তের পরাক্ষ যে বৃত্তের ব্যাস, তাহাকে উপবৃত্তের সহায়ক বৃত্ত বলে।

স্পষ্টতঃই সহায়ক বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= a$.

$\therefore$ উহার সমীকরণ, $x^2 + y^2 = a^2$.

মনে কর, P উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু।



চিত্র 57

P হইতে পরাক্ষের উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন কর। এইবার $\overline{NP}$ কে বর্ধিত কর এবং মনে কর, উহার সহায়ক বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

যেহেতু P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\overline{CN}, \overline{PN})$, অতএব Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\overline{CN}, \overline{QN})$.

এখন উপবৃত্ত এবং সহায়ক বৃত্তের সমীকরণ যথাক্রমে $(\overline{CN}, \overline{PN})$ এবং $(\overline{CN}, \overline{QN})$ দ্বারা সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad \frac{\overline{CN}^2}{a^2} + \frac{\overline{PN}^2}{b^2} = 1 \text{ এবং } \frac{\overline{CN}^2}{a^2} + \frac{\overline{QN}^2}{a^2} = 1,$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{PN}^2}{b^2} = \frac{\overline{QN}^2}{a^2},$$

$$\text{বা, } \quad \frac{\overline{PN}}{\overline{QN}} = \frac{b}{a} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

P ও Q বিন্দুদ্বয়কে **অনুরূপ বিন্দু** (Corresponding points) বলা হয়।

অতএব, (1) হইতে পাওয়া যায়,—

এক জোড়া অনুরূপ বিন্দুর কোটিদ্বয়ের অনুপাত একটি ধ্রুবক।

5·31. উৎকেন্দ্রিক কোণ (Eccentric angle)

উপরের অনুচ্ছেদের চিত্রে, মনে কর, $\angle QCN = \phi$.

তাহা হইলে, $\overline{CN} = \overline{CQ} \cos\phi = a\cos\phi$,

এবং $\overline{QN} = \overline{CQ} \sin\phi = a\sin\phi$.

আমরা জানি, $\dfrac{\overline{PN}}{\overline{QN}} = \dfrac{b}{a}$;

$$\therefore \overline{PN} = \frac{b}{a}\overline{QN} = \frac{b}{a}\cdot a\sin\phi = b\sin\phi.$$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a\cos\phi, b\sin\phi)$,

এবং ϕ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a\cos\phi, a\sin\phi)$.

ϕ কোণকে **উৎকেন্দ্রিক কোণ** বলা হয়।

5·32. উদাহরণমালা।

উদা. 1. $3x^2+4y^2=48$ উপবৃত্তটির (i) পরাক্ষ, উপাক্ষ ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য (ii) উৎকেন্দ্রতা (iii) কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দুদ্বয় এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (iv) পরাক্ষ, উপাক্ষ, নিয়ামক এবং নাভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the (i) lengths of major axis, minor axis and latus rectum (ii) eccentricity, (iii) co-ordinates of the centre, vertices and foci (iv) and equations of the major axis, minor axis, directrices and latus rectum of the ellipse $3x^2+4y^2=48$.]

প্রদত্ত সমীকরণ হইল, $3x^2+4y^2=48$,

$$\text{বা, } \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

এই সমীকরণটিকে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ এর সহিত তুলনা করিয়া পাই, $a^2=16$ এবং $b^2=12$.

বা, $a=4$ এবং $b=2\sqrt{3}$.

(i) এখানে $a>b$, $\therefore$ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a=8$.

উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b=4\sqrt{3}$.

$$\text{নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 12}{4} = 6.$$

(ii) $$\text{উৎকেন্দ্রতা} = e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16-12}{16}} = \frac{1}{2}.$$

(iii) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, 0).

শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm a, 0)\equiv(\pm 4, 0)$

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)\equiv(\pm 4\times\frac{1}{2}, 0)\equiv(\pm 2, 0)$.

(iv) পরাক্ষের সমীকরণ $y=0$,

উপাক্ষের সমীকরণ $x=0$.

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $x=\pm\dfrac{a}{e}$

$$\text{বা,}\quad x=\pm\frac{4}{\frac{1}{2}}=\pm 8.$$

নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ, $x=\pm ae$

বা, $x=\pm 4.\frac{1}{2}$

বা, $x=\pm 2$.

উদা. 2. $16x^2+9y^2=144$, উপবৃত্তটির (i) পরাক্ষ, উপাক্ষ ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য (ii) উৎকেন্দ্রতা (iii) কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দুদ্বয় এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (iv) পরাক্ষ, উপাক্ষ, নিয়ামকদ্বয় এবং নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the (i) length of the major axis, minor axis and latus rectum (ii) eccentricity (iii) co-ordinates of the centre, vertices and foci (iv) and equations of the major axis, minor axis, directrices, latus recta of the ellipse $16x^2+9y^2=144$.]

প্রদত্ত সমীকরণ হইল, $16x^2+9y^2=144$.

$$\text{বা,}\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

এই সমীকরণটিকে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সহিত তুলনা করিয়া পাই, $a^2=9$ এবং $b^2=16$;

বা, $a=3$ এবং $b=4$.

এখানে $b>a$, $\therefore$ পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং উপাক্ষ x-অক্ষ বরাবর হইবে।

শীর্ষদ্বয় ও নাভিদ্বয় y-অক্ষে অবস্থিত হইবে এবং নাভিলম্ব ও নিয়ামকদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল হইবে।

(i) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b=8$.

উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a=6$.

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2a^2}{b}=\frac{2\times 9}{4}=\frac{9}{2}$.

(ii) উৎকেন্দ্রতা $=e=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

(iii) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, 0)$.

শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm b)\equiv(0, \pm 4)$.

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm be)\equiv\left(0, \pm 4.\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$

$\equiv(0, \pm\sqrt{7})$

(iv) পরাক্ষের সমীকরণ, $x=0$

উপাক্ষের সমীকরণ, $y=0$.

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $y=\pm\frac{b}{e}$,

$$\text{বা, } y=\pm\frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$$

নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ, $y=\pm be$

$$\text{বা, } y=\pm 4.\frac{\sqrt{7}}{4}=\pm\sqrt{7}.$$

উদা. 3. দেখাও যে, $4x^2+y^2-8x+2y+1=0$, সমীকরণটি একটি উপবৃত্তকে সূচিত করে। এই উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Prove that the equation $4x^2+y^2-8x+2y+1=0$ represents and ellipse Find the eccentricity, foci and equation of the directrices.]

প্রদত্ত সমীকরণ হইল,

$$4x^2+y^2-8x+2y+1=0,$$

বা, $4(x^2-2x+1-1)+y^2+2y+1=0,$

বা, $4(x-1)^2+(y+1)^2=4,$

বা, $\dfrac{(x-1)^2}{1}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1,$

বা, $\dfrac{X^2}{1}+\dfrac{Y^2}{4}=1,$ [$X=x-1$ এবং $Y=y+1$ লইয়া]

স্পষ্টতঃই ইহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

∴ প্রদত্ত সমীকরণ একটি উপবৃত্তকে সূচিত করে।

এখানে, $a^2=1$ এবং $b^2=4$.

$\therefore\ a=1$ এবং $b=2$.

$$\therefore\ e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\dfrac{X^2}{1}+\dfrac{Y^2}{4}=1$ এর নাভির স্থানাঙ্ক $(0,\ \pm be)$

অর্থাৎ $X=0$, এবং $Y=\pm be$

বা, $x-1=0$, এবং $y+1=\pm 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\ x=1$ এবং $y=-1\pm\sqrt{3}$

∴ প্রদত্ত উপবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক $(1,\ -1\pm\sqrt{3})$.

নিয়ামকদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহাদের সমীকরণ :

$$Y=\pm\frac{b}{e}$$

$$\text{বা, }\ y+1=\pm\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

বা, $y=-1\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

উদা. 4. স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ ধরিয়া সেই উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার পরাক্ষের দৈর্ঘ্য 12 এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$.

[Find the equation of the ellipse referred to its axes as the axes of x and y respectively whose major axis is 12 and eccentricity is $\frac{1}{2}$.]

মনে কর, উপবৃত্তটির পরাক্ষ $=2a$ এবং উপাক্ষ $=2b$.

$\therefore\ 2a=12$; বা, $a=6$.

$b^2=a^2(1-e^2)=36(1-\frac{1}{4})=27$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$.

উদা. 5. স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ ধরিয়া সেই উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) যাহার উৎকেন্দ্রতা $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 3.

(ii) যাহার নাভিদ্বয় $(\pm 4, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{3}$.

[Find the equation of the ellipse, whose axes are the axes of co-ordinates and (i) whose eccentricity is $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ and latus rectum is 3;

(ii) whose foci are the points $(\pm 4, 0)$ and eccentricity is $\frac{1}{3}$.]

(i) মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

নাভিলম্ব $=\dfrac{2b^2}{a}$, বা, $3=\dfrac{2b^2}{a}$,

বা, $2b^2=3a$ ......(1)

আবার, উৎকেন্দ্রতা $=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ বা, $\frac{1}{2}=1-\frac{b^2}{a^2}$,

বা, $\frac{b^2}{a}=\frac{1}{2}$, বা, $2b^2=a^2$ ... ...(2)

(1) ও (2) হইতে পাই, $a^2=3a$,

বা, $a(a-3)=0$, $\therefore$ $a=3$ [$\because$ $a\neq 0$]

$\therefore$ $a^2=9$.

(2) হইতে পাই, $2b^2=9$, $\therefore$ $b^2=\frac{9}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{9}{2}}=1$, বা, $x^2+2y^2=9$.

(ii) মনে কর উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

তাহা হইলে নাভিদ্বয় হইল, $(\pm ae, 0)$

কিন্তু দেওয়া আছে নাভিদ্বয়, $(\pm 4, 0)$

$\therefore$ $ae=4$.

কিন্তু, $e=\frac{1}{3}$, $\therefore$ $a\times\frac{1}{3}=4$, $\therefore$ $a=12$.

আবার, $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$, বা, $\frac{1}{9}=1-\frac{b^2}{144}$,

বা, $\frac{b^2}{144}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$, $\therefore$ $b^2=\frac{8}{9}\times 144=128$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{128}=1$.

উদা. 6. স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ ধরিয়া সেই উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহা (2, 2) এবং (3, 1) বিন্দুগামী।

[Find the equation of the ellipse referred to its axes as axes of co-ordinates, which passes through the points (2, 2) and (3, 1).]

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

যেহেতু ইহা (2, 2) এবং (3, 1) বিন্দুগামী

$$\therefore \quad \frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \cdots (1) ; \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots (2)$$

(1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই, $a^2=\frac{32}{3}$, এবং $b^2=\frac{32}{5}$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সমীকরণ, } \frac{x^2}{\frac{32}{3}}+\frac{y^2}{\frac{32}{5}}=1$$

বা, $3x^2+5y^2=32$.

উদা. 7. যে উপবৃত্তের নাভিবিন্দু (6, 7), নিয়ামকের সমীকরণ, $x+y+2=0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse whose focus is (6, 7), directrix is $x+y+2=0$ and eccentricity is $\frac{1}{\sqrt{3}}$.]

মনে কর, নাভি S এবং $P(x, y)$ উপবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু; PM, P হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব।

$$\therefore \quad \overline{SP}=\sqrt{(x-6)^2+(y-7)^2}=\sqrt{x^2+y^2-12x-14y+85}$$

$$\text{এবং } \overline{PM}=\frac{x+y+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{x+y+2}{\sqrt{2}}.$$

উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $\overline{SP}=e.\overline{PM}$

$$\therefore \quad \sqrt{x^2+y^2-12x-14y+85}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{x+y+2}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{বা, } \quad x^2+y^2-12x-14y+85=\frac{x^2+y^2+4x+4y+2xy+4}{6}$$

$$\text{বা, } \quad 6x^2+6y^2-72x-84y+510=x^2+y^2+4x+4y+2xy+4$$

বা, $5x^2+5y^2-2xy-76x-88y+506=0.$

উদা. 8. p এর মান কত হইলে $px^2+4y^2=1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দুদ্বয় দিয়া যাইবে ? উপবৃত্তটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[For what values of p does the ellipse $px^2+4y^2=1$ pass through the points $(\pm 1, 0)$? Find the lengths of its two axes.]

যেহেতু, উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দুদ্বয় দিয়া যায়,

$\therefore \quad p(\pm 1)^2+4.0=1, \qquad \therefore \; p=1.$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ, $x^2+4y^2=1.$

বা, $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1,$ বা, $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{1}{2})^2}=1.$

এখানে, $a=1$ এবং $b=\frac{1}{2}.$

$\therefore$ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a=2$ এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b=1.$

উদা. 9. $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$, বিন্দুগামী যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x-অক্ষ ও y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{4}{5}$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse referred to its axes as axes of x and y respectively which passes through the point $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ and has the eccentricity $\frac{4}{5}$.]

মনে কর, উপবৃত্তটির সমীকরণ, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots(1)$

উপবৃত্তটি $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দুগামী,

$\therefore \quad \dfrac{100}{9a^2}+\dfrac{5}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$

আবার, $b^2=a^2(1-e^2)=a^2(1-\frac{16}{25})=\frac{9}{25}a^2 \quad \cdots \quad \cdots(3)$

(2) ও (3) সমাধান করিয়া পাই, $a^2=25,\ b^2=9.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল, $\dfrac{x}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

উদা. 10. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটি $7x+13y-87=0$ এবং $5x-8y+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং উহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{32}{5}\sqrt{2}$; a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

[The ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ passes through the point of intersection of the lines $7x+13y-87=0$ and $5x-8y+7=0$ and its latus rectum is $\frac{32}{5}\sqrt{2}$; find a and b.]

$7x+13y-87=0$ এবং $5x-8y+7=0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই, $x=5$ এবং $y=4$. অর্থাৎ, রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(5, 4)$.

উপবৃত্তটি $(5, 4)$ বিন্দু দিয়া যায়, $\therefore \dfrac{25}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1.$

বা, $16a^2+25b^2=a^2b^2 \qquad \cdots(1)$

আবার, নাভিলম্ব $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{32}{5}\sqrt{2}$,

বা, $b^2=\dfrac{16\sqrt{2}}{5}a \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$

(1) ও (2) হইতে পাই, $16a^2+25\times\dfrac{16\sqrt{2}}{5}a=a^2\times\dfrac{16\sqrt{2}}{5}a$

বা, $16\sqrt{2}\,a^2-80a-400\sqrt{2}=0$,

বা, $\sqrt{2}a^2-5a-25\sqrt{2}=0$,

বা, $(a-5\sqrt{2})(a\sqrt{2}+5)=0$,

$\therefore a=5\sqrt{2}$, বা, $-\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

a এর ঋণাত্মক মান গ্রহণ না করিয়া,

$$b^2=\frac{16\sqrt{2}}{5}a=\frac{16\sqrt{2}}{5}\times 5\sqrt{2}=32,$$

$\therefore \quad b=4\sqrt{2}\,; \quad \therefore \quad a=5\sqrt{2}$ এবং $b=4\sqrt{2}$.

প্রশ্নমালা (Exercise) 5B

1. নিম্নের উপবৃত্তগুলির প্রত্যেকটির (i) পরাক্ষ, উপাক্ষ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য (ii) উৎকেন্দ্রতা (iii) কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দুদ্বয় এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (iv) পরাক্ষ, উপাক্ষ, নিয়ামকদ্বয় এবং নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর :

[Find (i) the lengths of major axis, minor axis and latus rectum (ii) eccentricity (iii) co-ordinates of centre, vertices and foci and (iv) equations of major axis, minor axis, directrices and latus recta of each of the following ellipses :]

(a) $9x^2+25y^2=225$.

(b) $9x^2+4y^2=36$.

(c) $x^2+2y^2=2$.

2. দেখাও যে, $16x^2+25y^2-64x-150y=111$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্তের সমীকরণ। এই উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Prove that the equation $16x^2+25y^2-64x-150y=111$ represents an ellipse. Find the eccentricity, foci and equation of the directrices.]

3. স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে অক্ষ ধরিয়া সেই উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার পরাক্ষের দৈর্ঘ্য 8 এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$.

[Find the equation to the ellipse (referred to axes as the axes of x and y respectively) whose major axis is 8 and eccentricity $\frac{1}{2}$.]

4. $(-3, 1)$ এবং $(2, -2)$ বিন্দুগামী যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x-অক্ষ এবং y-অক্ষ, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। ইহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse (referred to its axes as the axes of co-ordinates) which passes through the points $(-3, 1)$ and $(2, -2)$. Find its latus rectum, eccentricity and co-ordinates of the foci.]

5. কোন উপবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 4 এবং নিকটতম নাভি হইতে শীর্ষের দূরত্ব 1·5 হইলে উহার উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

[Find the eccentricity of the ellipse whose latus rectum is 4 and distance of the vertex from the nearest focus is 1·5.]

6. যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x ও y-অক্ষ এবং যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{\sqrt{5}}$ এবং নাভিলম্ব 8, সেই উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse (referred to its axes as the axes of co-ordinates) whose eccentricity is $\frac{1}{\sqrt{5}}$ and latus rectum is 8.]

7. যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x ও y-অক্ষ এবং যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{3}$ এবং নাভিলম্ব 8, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse (referred to its axes as the axes of co-ordinates) whose eccentricity is $\frac{1}{3}$ and latus rectum is 8.]

8. যে উপবৃত্তের নাভিলম্ব উপাক্ষের অর্ধ, তাহার উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

[Find the eccentricity of the ellipse, whose latus rectum is half the minor axis.]

9. যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$ এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm 2, 0)$ তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse (referred to its axes as the axes of co-ordinates) whose eccentricity is $\frac{1}{2}$ and co-ordinates of the foci are $(\pm 2, 0)$.]

10. যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x ও y অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যাহার নাভিলম্ব 16 এবং উপাক্ষ নাভিদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse (referred to its axes as the axes of co-ordinates) whose latus rectum is 16 and minor axis is equal to the distance between the foci.]

11. একটি উপবৃত্তের নাভিদ্বয় (0, 1) ও (0, −1) বিন্দুদ্বয় এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য এক একক। উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[The foci of an ellipse are the points (0, 1) and (0, −1) and the minor axis is of unit length. Find the equation of the ellipse.]

12. (−3, 1) বিন্দুগামী যে উপবৃত্তের (যাহার অক্ষদ্বয় যথাক্রমে x ও y) উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{2}{5}}$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse (referred to its axes as the axes of co-ordinates) which passes through the point (−3, 1) and whose eccentricity is $\sqrt{\frac{2}{5}}$.]

13. একটি উপবৃত্তের পরাক্ষ x-অক্ষ বরাবর এবং উপাক্ষ y-অক্ষ বরাবর অবস্থিত। ইহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$ এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 4 হইলে, উহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে উহা (2, 3) বিন্দুগামী।

[An ellipse has its major axis along the x-axis and the minor axis along the y-axis. If its eccentricity be $\frac{1}{2}$ and distance between its foci be 4, find its equation and show that it passes through the point (2, 3).]

14. একটি উপবৃত্তের নাভি হইতে নিকটতম নিয়ামকের দূরত্ব 16 সেমি. এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{3}{5}$ হইলে, উহার প্রধান অক্ষগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[If the distance of the focus of an ellipse from the nearest directrix be 16 cm. and the eccentricity of the ellipse be $\frac{3}{5}$, find the lengths of its principal axes.]

15. উপবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য পরাক্ষের অর্ধ হইলে, উহার উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

[If the latus rectum of an ellipse be half of the major axis, find the eccentricity of the ellipse.]

16. যে উপবৃত্তের নাভি $(-1, 1)$ বিন্দু, নিয়ামক $x-y+3=0$ রেখা এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse whose focus is $(-1, 1)$, directrix is $x-y+3=0$ and eccentricity is $\frac{1}{2}$.]

17. যে উপবৃত্তের নাভি $(2, -1)$, নিয়ামক $x+2y+3=0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{5}{6}$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse whose focus is $(2, -1)$, directrix is $x+2y+3=0$ and eccentricity is $\frac{5}{6}$.]

18. যে উপবৃত্ত x-অক্ষের উপর $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$ সরলরেখা এবং y-অক্ষের উপর $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ সরলরেখার সহিত মিলিত হয় এবং যাহার অক্ষদ্বয় x-এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা এবং নাভি-দ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse which meets the straight line $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$ on the axis of x and the straight line $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ on the axis of y and whose axes lie along the axes of co-ordinates. Determine the eccentricity and co-ordinates of the foci of the ellipse.]

19. যে উপবৃত্তের নাভিদ্বয় $(c, 0)$ এবং $(-c, 0)$ বিন্দুদ্বয় এবং পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the ellipse whose foci are $(c, 0)$ and $(-c, 0)$ and the length of its major axis is $2a$.]

20. যে উপবৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$ এবং অক্ষদ্বয়ের অর্ধাংশ যথাক্রমে 3 এবং 2, যদি তাহার পরাক্ষ (i) x-অক্ষের সমান্তরাল হয়, (ii) y-অক্ষের সমান্তরাল হয় তবে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the ellipse whose semi-axes are 3 and 2, if the major axis is (i) parallel to the axis of x, (ii) parallel to the axis of y.]

21. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটি $3x+2y=11$ এবং $2x-y=5$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী। যদি উহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

[The ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ passes through the point of intersection of the lines $3x+2y=11$ and $2x-y=5$ and its latus rectum is $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; find a and b.]

22. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ উপবৃত্তটির উপরিস্থিত একটি বিন্দুর উহার কেন্দ্র হইতে দূরত্ব 2 হইলে, ঐ বিন্দুর উৎকেন্দ্রিক কোণ নির্ণয় কর।

[The distance of a point on the ellipse $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ from the centre is 2. Find the eccentric angles.]

পরাবৃত্ত (Hyperbola)

5·33. পরাবৃত্ত (Hyperbola)।

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে কনিকের উৎকেন্দ্রতা e এক অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে কনিককে পরাবৃত্ত বলে।

কনিকের সাধারণ সংজ্ঞার সাহায্য না লইয়াও পরাবৃত্তের সংজ্ঞা নির্দেশ করা যায়।

যদি কোন সমতলে একটি চলমান বিন্দু এইরূপ ভাবে চলিতে থাকে যে, ঐ সমতলস্থ একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট স্থির সরলরেখা হইতে উহার দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সর্বদাই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর একটি ধ্রুবক হয়, তবে ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে **পরাবৃত্ত** বলে।

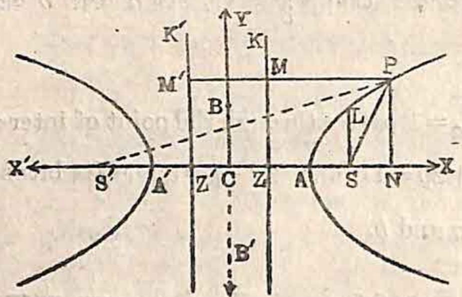
নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে ঐ পরাবৃত্তের **নাভি** (Focus), নির্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার **নিয়ামক** (Directrix) এবং দূরত্বদ্বয়ের ধ্রুবক অনুপাতকে ঐ পরাবৃত্তের **উৎকেন্দ্রতা** (Eccentricity) বলা হয়।

5·34. পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ।

[**Standard Equation of the hyperbola**]

মনে কর, পরাবৃত্তের নাভি বিন্দু S, নিয়ামক ZK এবং উৎকেন্দ্রতা $e(>1)$.

S বিন্দু হইতে $\overleftrightarrow{ZK}$ এর উপর $\overline{SZ}$ লম্ব অঙ্কন কর এবং $\overline{SZ}$ কে $e:1$ অনুপাতে A বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত এবং A′ বিন্দুতে বহির্বিভক্ত কর।



চিত্র 58

তাহা হইলে,

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{AZ}}=\frac{\overline{SA'}}{\overline{A'Z}}=e.$$

সুতরাং, A এবং A′ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত দুইটি বিন্দু।

মনে কর, $\overline{AA'}$ এর মধ্যবিন্দু C.

C বিন্দু হইতে $\overline{AA'}$ এর উপর $\overrightarrow{CY}$ লম্ব অঙ্কন কর।

এখন, C কে মূলবিন্দু, $\overrightarrow{CX}$ কে x-অক্ষ এবং $\overrightarrow{CY}$ কে y-অক্ষ ধর।

মনে কর, $\overline{AA'}=2a$,

তাহা হইলে, $\overline{CA}=\overline{CA'}=a$.

এখন, $\overline{SA}+\overline{SA'}=e(\overline{AZ}+\overline{A'Z})$,

বা, $\overline{SA}+(\overline{SA}+\overline{AA'})=e.\overline{AA'}$,

বা, $\overline{SA}+\overline{SA}+2\overline{CA}=e.\overline{AA'}$,

বা, $2(\overline{SA}+\overline{CA})=e.2a$,

বা, $2\overline{CS}=2e\,a$,

$\therefore\ \ \overline{CS}=e.a.$ ... ... (1)

আবার, $\overline{SA'}-\overline{SA}=e(\overline{A'Z}-\overline{AZ})$,

বা, $(\overline{SA}+\overline{AA'})-\overline{SA}=e\{(\overline{AA'}-\overline{AZ})-\overline{AZ}\}$,

বা, $\overline{AA'}=e(\overline{AA'}-2\overline{AZ})$,

বা, $2a=e(2\overline{CA}-2\overline{AZ})$,

বা, $2a=2e(\overline{CA}-\overline{AZ})$,

বা, $a=e.\overline{CZ}$,

$\therefore\ \ \overline{CZ}=\dfrac{a}{e}.$ ... ... (2)

মনে কর, $P(x, y)$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন একটি বিন্দু।

$\overline{SP}$ যোগ কর ; P বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর $\overline{PN}$ ও $\overline{MZ}$ এর উপর $\overline{PM}$ লম্ব অঙ্কন কর।

তাহা হইলে, $\overline{CN}=x$, $\overline{PN}=y$,

$$\overline{PM}=\overline{ZN}=\overline{CN}-\overline{CZ}=x-\frac{a}{e}\cdot$$

যেহেতু, (1) হইতে পাই, $\overline{CS}=ae$,

$\therefore$ S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$.

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$$\overline{SP}=e.\overline{PM},$$

বা, $\overline{SP}^2=e^2.\overline{PM}^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

এখন, $\overline{SP}^2=\overline{NS}^2+\overline{PN}^2=(\overline{CS}-\overline{CN})^2+\overline{PN}^2=(ae-x)^2+y^2$,

এবং $e^2.\overline{PM}^2=e^2\overline{ZN}^2=e^2(\overline{CN}-\overline{CZ})^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$.

(3) হইতে পাই, $(ae-x)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$

বা, $x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$

যেহেতু, $e>1$, সুতরাং, $a^2(e^2-1)$ ধনাত্মক।

$\therefore$ (4) হইতে পাই, $\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=\mathbf{1}$, যেখানে $\mathbf{b}^2=\mathbf{a}^2(e^2-1)$ $\cdots(5)$

ইহাই পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত। উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{x^2-a^2}{a^2}=\frac{(x-a)(x+a)}{a^2},$$

$$\therefore \frac{\overline{PN}^2}{b^2}=\frac{\overline{AN}.\overline{A'N}}{a^2}$$

অর্থাৎ, $\overline{PN}^2 : \overline{AN}.\ \overline{A'N} :: b^2 : a^2$.

দ্রষ্টব্য। পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে $a>b$, $a<b$ বা, $a=b$ হইতে পারে।

5·35. সংজ্ঞা।

শীর্ষবিন্দু : A ও A' বিন্দুদ্বয়কে পরাবৃত্তের দুইটি শীর্ষ (vertices) বলে।

কেন্দ্র : $\overline{AA'}$ এর মধ্যবিন্দু C কে পরাবৃত্তের কেন্দ্র (centre) বলে।

অক্ষদ্বয় : x-অক্ষের $\overline{AA'}$ অংশকে পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ (transverse axis) বলে।

$\therefore$ **উহার দৈর্ঘ্য** $= \overline{AA'} = 2\mathbf{a}$.

যদি y অক্ষের উপর B এবং B′ এমন দুইটি বিন্দু লওয়া হয় যে $\overline{CB} = \overline{CB'} = b$ হয়, তবে $\overline{BB'}$ কে পরাবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ (Conjugate axis) বলে।

$\therefore$ **উহার দৈর্ঘ্য** $= \overline{BB'} = 2\mathbf{b}$.

5·36. উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিলম্ব (Eccentricity and **Latus** rectum).

অনুচ্ছেদ 5·34 এর (5) নং সম্পর্কটি হইল,

$$b^2 = a^2(e^2 - 1).$$

$$\text{বা,}\quad \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1,$$

$$\text{বা,}\ e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2},$$

$$\therefore\ \mathbf{e} = \sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2}}.$$

নাভিলম্ব $= \overline{LL'}$

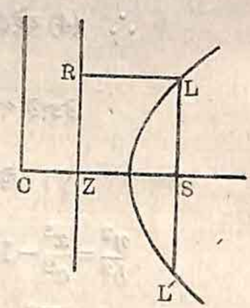
$= 2\overline{SL}$

$= 2e.\ \overline{LR}$

$= 2e(\overline{CS} - \overline{CZ})$

$= 2e\left(ae - \dfrac{a}{e}\right)$

$= 2a\left(e^2 - 1\right) = \dfrac{\mathbf{2b^2}}{\mathbf{a}}.$



চিত্র 59

5·37. প্রত্যেক পরাবৃত্তের দুইটি নাভি ও দুইটি নিয়ামক আছে।

[Every hyperbola has two foci and two directrices.]

$\overline{SA'}$ রেখার উপর S′ ও Z′ বিন্দুর উপর S′ ও Z′ বিন্দু লও যেন $\overline{CS'} = \overline{CS} = ae$ এবং $\overline{CZ'} = \overline{CZ} = \dfrac{a}{e}$ হয়। (অনুচ্ছেদ 5·34 এর চিত্র দেখ)

$\overline{AA'}$ রেখার উপর $\overrightarrow{Z'M'}$ এবং $\overrightarrow{Z'M'}$ এর উপর $\overline{PM'}$ লম্ব অঙ্কন কর।

এখন, পরাবৃত্তের সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1,$$

বা, $x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$,

বা, $x^2+a^2e^2+y^2=a^2+e^2x^2$,

বা, $x^2+2aex+a^2e^2+y^2=x^2e^2+2aex+a^2$,

বা, $(x+ae)^2+y^2=e^2\left(x+\frac{a}{e}\right)^2$,

বা, $(\overline{CN}-\overline{CS'})^2+\overline{PN}^2=e^2(\overline{CZ'}+\overline{CN})^2$,

বা, $\overline{S'N^2}+\overline{PN}^2=e^2.\overline{Z'N^2}$,

বা, $\overline{S'P^2}=e^2.\overline{PM'}^2$,

$\therefore\ \overline{S'P}=e.\overline{PM'}$.

সুতরাং, বুঝা গেল যে, S´ কে নাভি, $\overrightarrow{Z'M'}$ কে নিয়ামক এবং e-কে উৎকেন্দ্রতা লইলে একই পরাবৃত্ত পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ প্রত্যেক পরাবৃত্তের দুইটি নাভি ও দুইটি নিয়ামক থাকে।

দ্রষ্টব্য। (i) শীর্ষ A ও A′ এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ এবং $(-a, 0)$.

(ii) S ও S´ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(ea, 0)$ এবং $(-ea, 0)$.

(iii) $\overrightarrow{Z'M'}$ এবং $\overrightarrow{ZM}$ নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $x=\frac{a}{e}$ এবং $x=-\frac{a}{e}$.

5·38. পরাবৃত্তের আকৃতি।

[Shape of hyperbola.]

পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ইহা হইতে পাই, $y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$ ......(1)

এবং $x=\pm a\sqrt{\frac{y^2}{b^2}+1}$ ......(2)

(1) হইতে দেখা যায়, $x<a$ অথবা $>-a$ হইলে y অবাস্তব হইবে।

সুতরাং, a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং $-a$ অপেক্ষা বৃহত্তর ভুজ-বিশিষ্ট কোন বিন্দুই পরাবৃত্তের উপর থাকিবে না, অতএব A এবং A´ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে পরাবৃত্তের কোন অংশই থাকিবে না। (অনু. 5·34 এর চিত্রে দ্রষ্টব্য)।

(1) হইতে আরও দেখা যায় যে $x=a$ বা, $-a$ হইলে $y=0$ হয় ; অতএব পরাবৃত্তটি x-অক্ষকে A এবং A′ বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, $x>a$ বা $<-a$ হইলে, x-এর প্রত্যেক মানের জন্য y এর দুইটি করিয়া মান আছে; এই মানদ্বয় সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট। পরাবৃত্ত x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং A বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে এবং A´ বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে x-অক্ষের উভয় পার্শ্বে অসীম পর্যন্ত প্রসারিত।

(2) হইতে দেখা যায় যে, y এর যে কোন মানের জন্যই (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) x-এর মান পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট দুইটি করিয়া মান আছে ; অতএব, পরাবৃত্তটি y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

সুতরাং, বুঝা গেল, পরাবৃত্তের অসীম পর্যন্ত প্রসারিত দুইটি শাখা আছে, একটি $x=a$ সরলরেখার ডানদিকে এবং অপরটি $x=-a$ রেখার বাম দিকে।

6·39. নাভিদ্বয় হইতে পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অন্তর তির্যক অক্ষের সমান।

[The difference of the focal distances of any point on a hyperbola is equal to the transverse axis.]

[অনু. 5·34 এর চিত্র দেখ].

মনে কর, P(x, y) পরাবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু।

$\therefore\ \overline{SP}=e\,\overline{PM}=e.\overline{NZ}=e(\overline{CN}-\overline{CZ})=ex-a.$

এবং $\overline{S'P}=e.\overline{PM'}=e.\overline{NZ'}=e(\overline{CN}+\overline{CZ'})=ex+a.$

$\therefore\ \overline{S'P}-\overline{SP}=(ex+a)-(ex-a)=2a=$ **তির্যক অক্ষ**।

দ্রষ্টব্য। নাভি S হইতে পরাবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু P(x, y) এর দূরত্ব $=\mathbf{ex-a}$.

এবং নাভি S´ হইতে P(x, y) এর দূরত্ব $=\mathbf{ex+a}$.

5·40. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **পরাবৃত্তটির সাপেক্ষে** P $(x_1\ \ y_1)$ **বিন্দুর অবস্থান।**

[Position of a point P $(x_1,\ y_1)$ with respect to the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$]

[উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-এ b^2 এর পরিবর্তে $-b^2$ লিখিলে পরাবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পাওয়া যায়। সুতরাং, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1$ উপবৃত্তের সাপেক্ষে P$(x_1,\ y_1)$ এর অবস্থান যেরূপে নির্ণয় করা হইয়াছে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের সাপেক্ষে P(x_1, y_1) এর অবস্থান সেই একই রূপে নির্ণয় করা যাইবে।]

(i) (x_1, y_1) বিন্দুটি পরাবৃত্তের ভিতরে থাকিবে, যদি

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}>1 \text{ হয়,}$$

(ii) (x_1, y_1) বিন্দুটি পরাবৃত্তের উপরে থাকিবে, যদি

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^3}{b^2}=1 \text{ হয় ;}$$

(iii) (x_1, y_1) বিন্দুটি পরাবৃত্তের বাহিরে থাকিবে, যদি

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}<1 \text{ হয়।}$$

দ্রষ্টব্য। উপবৃত্তের অনুরূপ ফলগুলির সহিত পরাবৃত্তের ফলগুলির পার্থক্য লক্ষণীয়।

5·41. অন্যান্য আকারে পরাবৃত্তের সমীকরণ।

[Equations of hyperbola in other forms.]

(i) নাভি S $(ae, 0)$ কে মূল-বিন্দু, SX কে x-অক্ষ এবং SX এর উপর S বিন্দুতে লম্ব PL কে y-অক্ষ লইলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ হইবে।

$$\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{a})^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=1.$$

(ii) শীর্ষ A $(a, 0)$ কে মূলবিন্দু, AX কে x-অক্ষ এবং AX এর উপর A বিন্দুগামী লম্বকে y-অক্ষ ধরিলে পরাবৃত্তের সমীকরণ হইবে।

$$\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{a})^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=1.$$

(iii) আবার, Z $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ কে মূলবিন্দু, ZX কে x-অক্ষ এবং নিয়ামক ZM কে y-অক্ষ ধরিলে পরাবৃত্তের সমীকরণ হইবে,

$$\frac{\left(x+\frac{a}{e}\right)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

5·42. পরাবৃত্তের নাভি (α, β) নিয়ামক $\mathbf{lx+my+n=0}$ এবং উৎকেন্দ্রতা e হইলে, উহার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the hyperbola whose focus is (α, β) directrix $lx+my+n=0$ and eccentricity $e\,(>1)$.]

মনে কর, P(x, y) পরাবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু, S নাভিবিন্দু এবং PM নিয়ামকের উপর লম্ব।

তাহা হইলে, $\overline{SP}=e.\overline{PM}$,

বা, $\overline{SP}^2=e^2.\ \overline{PM}^2$,

$$\therefore\ (\mathbf{x}-\alpha)^2+(\mathbf{y}-\beta)^2=\mathbf{e}^2\cdot\frac{(\mathbf{lx+my+n})^2}{\mathbf{l}^2+\mathbf{m}^2}\quad\cdots\cdots(1)$$

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য। সমীকরণ (1) কে সরল করিলে নিম্নের আকার বিশিষ্ট সমীকরণ পাই, $\mathbf{ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0}$, [যেখানে $h^2>ab$].

5·43. আদর্শ আকারের পরাবৃত্তের সমীকরণ সম্বন্ধীয় যে বিভিন্ন ফলগুলি সর্বদা স্মরণ রাখা প্রয়োজন, তাহা নিম্নে দেওয়া হইল :

(1) পরাবৃত্তের কেন্দ্র (0, 0).

(2) নাভিদ্বয় $(\pm ae, 0)$.

(3) শীর্ষবিন্দুদ্বয় $(+a, 0)$

(4) z ও z′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ এবং $\left(-\frac{a}{e}, 0\right)$.

(5) তির্যক অক্ষের সমীকরণ, $y=0$.

(6) অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ, $x=0$.

(7) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $x=\pm\frac{a}{e}$.

(8) তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$.

(9) অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b$

(10) উৎকেন্দ্রতা $=e=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}$.

(11) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{2b^2}{a}$.

(12) নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ, $x=\pm ae$.

5·44. অনুবন্ধী পরাবৃত্ত (Conjugate Hyperbola).

যদি একটি পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষ যথাক্রমে অপর একটি পরাবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ এবং তির্যক অক্ষ হয়, তবে দ্বিতীয় পরাবৃত্তকে প্রথমটির **অনুবন্ধী পরাবৃত্ত** বলে।

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তটির তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$ এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b$ এবং উহারা যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

সুতরাং, অনুবন্ধী পরাবৃত্তটির তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b$ এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$ হইবে এবং উহারা যথাক্রমে y-অক্ষ ও x-অক্ষ বরাবর অবস্থিত হইবে।

$\therefore$ অনুবন্ধী পরাবৃত্তের সমীকরণ হইবে

$$\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}-\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}=\mathbf{1} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

সমীকরণ (1) কে $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, বা, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ আকারেও প্রকাশ করা যায়।

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ এর অনুবন্ধী পরাবৃত্তের সমীকরণ পাইতে হইলে a^2 এবং b^2 এর পরিবর্তে যথাক্রমে $-a^2$ এবং $-b^2$ লিখিতে হইবে।

অনুবন্ধী পরাবৃত্তের শীর্ষদ্বয় এবং নাভিদ্বয় y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং নিয়ামকদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল।

অনুবন্ধী পরাবৃত্তের শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm a)$.

উহার উৎকেন্দ্রতাকে e' দ্বারা সূচিত করিলে,

$$e'=\sqrt{\frac{b^2+a^2}{b^2}} \text{ হইবে।}$$

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইবে $(0, \pm ae')$.

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $y = \pm \dfrac{a}{e'}$

5·45. সমপরাবৃত্ত (Rectangular Hyperbola)

যে পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষ পরস্পর সমান, তাহাকে **সমপরাবৃত্ত** বলে।

সুতরাং সমপরাবৃত্তের সমীকরণ হইবে,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

বা, $\mathbf{x^2 - y^2 = a^2}$.

ইহার **উৎকেন্দ্রতা** $= \sqrt{\dfrac{a^2 + a^2}{a^2}} = \sqrt{2}$.

5·46. উদাহরণমালা।

উদা. 1. $4x^2 - 9y^2 = 36$, পরাবৃত্তটির নাভিলম্ব, উৎকেন্দ্রতা, শীর্ষবিন্দুদ্বয় ও নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the latus rectum, the eccentricity, the co-ordinates of the vertices and the foci, the lengths of the axes and the equations of the directrices of the hyperbola $4x^2 - 9y^2 = 36$.]

প্রদত্ত সমীকরণ হইল, $4x^2 - 9y^2 = 36$,

বা, $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

এখানে, $a^2 = 9$, এবং $b^2 = 4$.

নাভিলম্ব $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2 \times 4}{3} = \dfrac{8}{3}$.

$$e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{9+4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm a, 0), \equiv (\pm 3, 0)$.

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0) \equiv \left(\pm 3 . \dfrac{\sqrt{13}}{3}, 0\right) \equiv \left(\pm \sqrt{13}, 0\right)$.

তির্যক অক্ষ $= 2a = 2 \times 3 = 6$.

অনুবন্ধী অক্ষ $=2b=2\times 2=4$.

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $x=\pm\frac{a}{e}$ বা, $x=\pm\frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{3}$,

$$\text{বা,}\quad x=\pm\frac{9}{\sqrt{13}}.$$

উদা. 2. $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$ পরাবৃত্তটির কেন্দ্র, শীর্ষদ্বয় ও নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, উৎকেন্দ্রতা, নাভিলম্ব, অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ এবং নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the co-ordinates of the centre, vertices and foci, the eccentricity, the latus rectum, the equation of the axes, the equation of the directrices and latus recta of the hyperbola $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$.]

প্রদত্ত সমীকরণ হইল,

$$9x^2-16y^2-18x-64y-199=0,$$

$$\text{বা,}\quad 9(x^2-2x)-16(y^2+4y)-199=0,$$

$$\text{বা,}\quad 9(x^2-2x+1)-16(y^2+4y+4)=199+9-64,$$

$$\text{বা,}\quad 9(x-1)^2-16(y+2)^2=144,$$

$$\text{বা,}\quad \frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখানে, $a=4$ এবং $b=3$.

মূলবিন্দুকে $(1, -2)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিলে সমীকরণ (1) এর আকার হইবে,

$$\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1. \qquad \begin{bmatrix} X=x-1, & Y=y+2 \\ \text{বা, } x=X+1, & y=Y-2 \end{bmatrix}$$

নূতন অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, 0)$.

শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm a, 0)\equiv(\pm 4, 0)$.

$$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16+9}{16}}=\frac{5}{4}.$$

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, $(\pm ae, 0)\equiv(\pm 4\times\frac{5}{4}, 0)\equiv(\pm 5, 0)$.

নাভিলম্ব $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 9}{4}=\frac{9}{2}$.

অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ, $Y=0$ এবং $X=0$.

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $X=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{4}{\frac{5}{4}}=\pm\frac{16}{5}$.

নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ, $X=\pm ae=\pm 4\times\frac{5}{4}=\pm 5$.

$\therefore$ **মূল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে**

কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0+1, 0-2)\equiv(1, -2)$.

শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, $(\pm 4+1, 0-2)$

$\equiv(5, -2)$ এবং $(-3, -2)$.

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, $(\pm 5+1, 0-2)$

$\equiv(6, -2)$ এবং $(-4, -2)$.

অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ, $y=0-2$ এবং $x=0+1$

বা, $y=-2$ এবং $x=1$

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $x=\pm\frac{16}{5}+1$.

বা, $x=\frac{21}{5}$ এবং $x=\frac{11}{5}$

নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ, $x=\pm 5+1$

বা, $x=6$ এবং $x=-4$.

উদা. 3. x ও y অক্ষদ্বয়কে অক্ষ ধরিয়া সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর (i) যাহার তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 এবং 6, (ii) যাহার অনুবন্ধী অক্ষ 5 এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 13.

[Find the equation to the hyperbola referred to its axes as the axes of co-ordinates

(i) whose transverse and conjugate axes are 8 and 6 respectively ;

(ii) whose conjugate axis is 5 and the distance between the foci is 13.]

(i) তির্যক অক্ষ $=2a=6$ $\therefore$ $a=3$.

অনুবন্ধী অক্ষ $=2b=8$, $\therefore$ $a=4$.

∴ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$

বা, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$

(ii) এখানে $2b=5$, $\therefore\ b=\frac{5}{2}$,

নাভিদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব $=2ae=13$,

$$\therefore\ e=\frac{13}{2a}.$$

কিন্তু, $e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}$,

বা, $\frac{169}{4a^2}=\frac{a^2+\frac{25}{4}}{a^2}$,

বা, $169=4a^2+25$,

বা, $4a^2=144$,

$\therefore\ a^2=36.$

∴ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1$,

বা, $\frac{x^2}{36}-\frac{4y^2}{25}=1.$

উদা. 4. স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে পরাবৃত্তের অক্ষ ধরিয়া সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) যাহা (1, 1) ও (2, −3) বিন্দু দিয়া যায় ;

(ii) যাহার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{3}{2}}$ এবং একটি নাভি $(2\sqrt{6}, 0)$.

[Find the equation to the hyperbola, referred to its axes as the axes of co-ordinates,

(i) which passes through the points (1, 1) and (2, −3),

(ii) whose eccentricity is $\sqrt{\frac{3}{2}}$ and one of whose foci is $(2\sqrt{6}, 0)$.]

মনে কর, পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

মনে কর, পরাবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ... (1)

যেহেতু, ইহা (5, −3) বিন্দুগামী,

$$\therefore \frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

আবার, $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$,

$$\therefore \frac{a^2+b^2}{a^2}=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2=\frac{8}{5},$$

বা, $1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{8}{5}$,

বা, $\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{5}$,

বা, $b^2=\frac{3}{5}a^2$. ... ... (1)

(2) এবং (3) সমাধান করিয়া পাই

$a^2=10$ এবং $b^2=6$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল,

$$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1,$$

বা, $3x^2-5y^2=30$.

উদা. 6. যে পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা ও একটি নাভি (−1, 3) এবং নিয়ামক $x+2y+1=0$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the hyperbola having eccentricity 3, one focus (−1, 3) and the equation of the corresponding directrix $x+2y+1=0$.]

মনে কর, পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P(x, y) যে কোন বিন্দু। P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব অঙ্কন কর।

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$SP^2=e^2 . PM^2$, ... (1)

যেহেতু, ইহা (1, 1) এবং (2, −3) বিন্দুগামী,

$\therefore \quad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

এবং $\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

(1) এবং (2) সমাধান করিয়া পাই,

$a^2=\frac{5}{2},\ b^2=\frac{5}{3}.$

নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{\frac{5}{2}}-\frac{y^2}{\frac{5}{3}}=1,$

বা, $2x^2-3y^2=5.$

(ii) পরাবৃত্তের একটি নাভি হইল $(2\sqrt{6},\ 0)$.

$\therefore$ আমরা $ae=2\sqrt{6}$, ধরিতে পারি,

বা, $a.\sqrt{\frac{3}{2}}=2\sqrt{6},$

$\therefore \quad a=2\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{2}{3}}=4.$

আবার, $e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2},$

বা, $\frac{3}{2}=\frac{16+b^2}{16},$

$\therefore$ বা, $b^2=8.$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল,

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1,$$

বা, $x^2-2y^2=16.$

উদা. 5. স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে পরাবৃত্তের অক্ষ ধরিয়া সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা (5, −3) বিন্দুগামী এবং যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

[**Find the equation to the hyperbola, referred to its axes as the axes of co-ordinates, which passes through the point (5, −3) and whose eccentricity is $\frac{2\sqrt{10}}{5}$**]

নাভি S এর স্থানাঙ্ক $(-1, 3)$,

$\therefore \quad SP = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$.

আবার, $PM = \dfrac{x+2y+1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{x+2y+1}{\sqrt{5}}$.

$\therefore$ (1) হইতে পাই,

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = e^2 \cdot \frac{(x+2y+1)^2}{5},$$

বা, $x^2+2x+1+y^2-6y+9 = 3^2 \cdot \dfrac{x^2+4y^2+1+4xy+4y+2x}{5}$

বা, $5x^2+5y^2+10x-30y+50 = 9x^2+36y^2+36xy$
$\qquad\qquad +36y+18x+9$

বা, $4x^2+31y^2+36xy+8x+66y-41=0$.

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

প্রশ্নমালা (Exercise) 5C

1. $9x^2-16y^2=144$, পরাবৃত্তটির নাভিলম্ব, উৎকেন্দ্রতা, শীর্ষবিন্দুদ্বয় ও নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the latus rectum, eccentricity, the co-ordinates of the vertices and the foci, the lengths of the axes and the equations of the directrices of the hyperbola $9x^2-16y^2 = 144$.]

2. নিম্নের পরাবৃত্তদ্বয়ের প্রত্যেকটির নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [Find the foci, directrices and eccentricities of each of the following hyperbola] :—

(i) $x^2-4y^2=16$

(ii) $x^2-4y^2-6x-16y-23=0$.

3. নিম্নের প্রত্যেকটি পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ, অনুবন্ধী অক্ষ, উৎকেন্দ্রতা, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the transverse axis, conjugate axis, eccentricity, co-ordinates of the centre, co-ordinates of the foci and the equations of the directrices of each of the following hyperbola] :—

(i) $4x^2-9y^2-16x-54y-101=0$.

(ii) $9x^2-16y^2+72x-32y-16=0$.

4. দেখাও যে, $3x^2-4y^2-12x-8y-4=0$, সমীকরণটি একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ এবং উহার কেন্দ্র ও অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Show that the equation $3x^2-4y^2-12x-8y-4=0$ represents a hyperbola and find its centre and equations of the axes.]

5. $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা ও নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the eccentricity and co-ordinates of the two foci of the hyperbola $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1.$]

6. স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে অক্ষ ধরিয়া সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর,

(i) যাহার অনুবন্ধী অক্ষ 12 এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 20 ;

(ii) যাহার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{2}$ এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 16 ;

(iii) যাহার একটি নাভির স্থানাঙ্ক $(2\sqrt{15}, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{5}{3}}$;

(iv) যাহার নাভিলম্ব 6 এবং উৎকেন্দ্রতা $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$;

(v) যাহার তির্যক এবং অনুবন্ধী অক্ষদ্বয় যথাক্রমে 3 এবং 4 ;

(vi) যাহা (2, 1) এবং (4, 5) বিন্দুগামী ;

(vii) যাহার অনুবন্ধী অক্ষ 4 এবং যাহা (3, 1) বিন্দুগামী ;

(viii) যাহার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{5}{2}}$ এবং যাহা (1, 1) বিন্দুগামী।

[Find the equation of the hyperbola referred to its axes as the axes of co-ordinates :—

(i) whose transverse axis is 12 and distance between the foci is 20 ;

(ii) whose eccentricity is $\sqrt{2}$ and distance between the foci is 16 ;

(iii) the co-ordinates of one of whose foci are $(2\sqrt{15}, 0)$ and eccentricity is $\sqrt{\frac{5}{3}}$;

(iv) whose latus rectum is 6 and eccentricity $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$;

(v) whose transverse and conjugate axes are 3 and 4 respectively ;

(vi) which passes through the points (2, 1) and (4, 5) respectively ;

(vii) which passes through the point (3, 1) and whose conjugate axis is 4 ;

(viii) which passes through the point (1, 1) and whose eccentricity is $\sqrt{\frac{5}{2}}$.]

7. সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর

(i) যাহার নাভি $(-1, 2)$, উৎকেন্দ্রতা 3 এবং নিয়ামক $x+y=7$;

(ii) যাহার নাভি $(-2, 3)$, উৎকেন্দ্রতা 5 এবং নিয়ামক $3x-4y-5=0$;

(iii) যাহার নাভি (2, 3), উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{3}$ এবং নিয়ামক $x+2y=1$.

[Find the equation of the hyperbola

(i) whose focus is $(-1, 2)$, eccentricity is 3 and directrix is $x+y=7$;

(ii) whose focus is $(-2, 3)$, eccentricity is 5 and the directrix is $3x-4y-5=0$;

(iii) whose focus is (2, 3), eccentricity is $\sqrt{3}$ and directrix is $x+2y=1$.]

8, যে পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় $(12, -5)$ ও $(-4, -5)$ এবং উৎকেন্দ্রতা 2, তাহার সমীকরণ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the equation of the hyperbola whose foci are $(12, -5)$ and $(-4, -5)$ and eccentricity is 2. Find also the length of the latus rectum,]

9. সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার নাভি $(a, 0)$, নিয়ামক $x=\frac{1}{2}a$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{2}$.

[Obtain the equation of the hyperbola whose focus is $(a, 0)$, directrix is the straight line $x=\frac{1}{2}a$ and eccntricity is $\sqrt{2}$,]

10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তটি $4x-y=16$ ও $3x-2y=7$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী। উহার নাভিলম্ব $\frac{32\sqrt{2}}{5}$ হইলে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

[The hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ passes through the point of intersection of the lines $4x-y=16$ and $3x-2y=7$. If its latus rectum be $\frac{32\sqrt{2}}{5}$, find the values of a and b.]

11. $3x^2-4y^2=48$ পরাবৃত্তটির অনুবন্ধী পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the conjugate hyperbola of the hyperbola $3x^2-4y^2=48$.]

12. (3, 2) বিন্দুগামী সমপরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

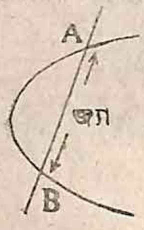
[Find the equation of the rectangular hyperbola which passes through the point (3, 2).]

ষষ্ঠ অধ্যায়

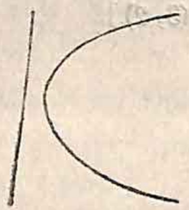
স্পর্শক ও অভিলম্ব (Tangents and Normals)

6·1. বৃত্ত বা কনিকের স্পর্শকের প্রথা-সম্মত সংজ্ঞা নির্দেশ করিবার পূর্বে সরলরেখা এবং বৃত্ত বা কনিকের ছেদ (intersection) সম্বন্ধে আলোচনা অপরিহার্য।

একটি সরলরেখা একটি বৃত্ত বা কনিককে দুইটি (বাস্তব বা অবাস্তব) বিন্দুতে ছেদ করে। বিন্দুদ্বয় বাস্তব হইলে, উহাদের দ্বারা ছিন্ন সরলরেখার অংশকে ঐ বৃত্তের বা কনিকের জ্যা বলে। (চিত্র 1)।



চিত্র 1



চিত্র 2

চিত্র 3

চিত্র 60

ছেদবিন্দুদ্বয় একই (Coincident) বিন্দু হইলে জ্যা-কে স্পর্শক বলা হয়। (চিত্র 3) সরল রেখা বৃত্ত বা কনিককে বাস্তবিকপক্ষে ছেদ না করিলে বলা হয় যে, উহা দুইটি অবাস্তব বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। (চিত্র 2)।

6·2 $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত এবং $y=mx+c$ সরলরেখার ছেদবিন্দু।

[Points of intersection of the straight line $y=mx+c$ and the circle $x^2+y^2=a^2$.]

প্রদত্ত বৃত্ত হইল, $x^2+y^2=a^2$ ... ... (1)

এবং প্রদত্ত সরলরেখা, $y=mx+c$ ... ... (2)

যেহেতু, বৃত্ত (1) এবং সরলরেখা (2) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক উভয় সমীকরণকে যুগপৎ সিদ্ধ করিবে, সুতরাং সমীকরণ দুইটিকে সমাধান করিলেই ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যাইবে।

(2) হইতে y এর মান (1) এ বসাইয়া পাই,

$$x^2+(mx+c)^2=a^2,$$

বা, $(1+m^2)x^2+2mcx+c^2-a^2=0$ ... ... (3)

(3) x-দ্বারা প্রকাশিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; ইহাকে সমাধান করিয়া x-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে।

∴ **সরলরেখা বৃত্তটিকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।**

x-এর এই মান দুইটি (2) এ বসাইয়া y-এর অনুরূপ মানদ্বয় পাওয়া যাইবে।

x এর যে কোন মান এবং y এর অনুরূপ (Corresponding) মান, বৃত্ত ও সরলরেখার একটি ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক ; x এর অপর মান এবং y এর অনুরূপ মান উহাদের অপর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক।

(i) যদি সমীকরণ (3) এর নিরূপক >0 হয়,

অর্থাৎ যদি $4m^2c^2-4(m^2+1)(c^2-a^2)>0$ হয়,

অর্থাৎ যদি, $a^2(1+m^2)-c^2>0$ হয়, তবে ছেদবিন্দুদ্বয় বাস্তব এবং পৃথক হইবে।

(ii) যদি $a^2(1+m^2)-c^2=0$ হয়, তবে ছেদবিন্দুদ্বয় বাস্তব এবং পরস্পর মিলিত (Coincident) হইবে।

(iii) যদি $a^2(1+m^2)-c^2<0$ হয়,

তবে (3) এর বীজদ্বয় অবাস্তব হইবে এবং সরল রেখাটি প্রকৃত পক্ষে বৃত্তকে ছেদ করিবে না। তখন বলা হয় যে, সরলরেখাটি বৃত্তকে দুইটি কাল্পনিক বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

6·3. $\mathbf{y^2=4ax}$ অধিবৃত্ত এবং $\mathbf{y=mx+c}$ সরলরেখার ছেদবিন্দু।

[Points of intersection of the line $y=mx+c$ and the parabola $y^2=4ax$.]

প্রদত্ত অধিবৃত্ত হইল, $y^2=4ax$ ... ... (1)

এবং প্রদত্ত রেখা হইল, $y=mx+c$ ... ... (2)

(2) হইতে y-এর মান (1) এ বসাইয়া পাই,

$$(mx+c)^2=4ax,$$

বা, $m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0$ ..... (3)

ইহা x-দ্বারা প্রকাশিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং, ইহাকে সমাধান করিয়া x এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে।

∴ **সরলরেখাটি অধিবৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।**

প্রাপ্ত x-এর মানদ্বয় (2) বসাইয়া y-এর অনুরূপ মানদ্বয় পাওয়া যাইবে।

যদি x-এর মানদ্বয় x_1, x_2 হয় এবং y-এর অনুরূপ মানদ্বয় y_1, y_2 হয়, তবে ছেদ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইবে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2).

(i) যদি সমীকরণ (3) এর নিরূপক >0 হয়,

অর্থাৎ, যদি $4(mc-2a)^2-4m^2c^2>0$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $4a^2-4mca>0$ হয়,

অথাৎ, যদি $\frac{a}{m}>c$ হয়,

তবে সরলরেখাটি অধিবৃত্তকে দুইটি বাস্তব এবং পৃথক বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(ii) যদি $4(mc-2a)^2+4m^3c^3=0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\frac{a}{m}=c$ হয়,

তবে সরল রেখাটি অধিবৃত্তকে দুইটি বাস্তব এবং অভিন্ন (Coincident) বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(iii) যদি $\frac{a}{m}<c$ হয়,

তবে সরলরেখাটি অধিবৃত্তকে দুইটি কাল্পনিক বিন্দুতে ছেদ করিবে।

6·4. $\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ উপবৃত্ত এবং $\mathbf{y=mx+c}$ সরলরেখার ছেদবিন্দু।

[Points of intersection of the line $y=mx+c$ and the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.]

প্রদত্ত উপবৃত্ত হইল, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ... (1)

এবং প্রদত্ত রেখা হইল, $y=mx+c$··· ... (2)

(2) হইতে y এর মান (1) এ বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

বা, $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0$ ... ... (3)

(3) কে সমাধান করিয়া, x এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ **সরলরেখাটি উপবৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।**

প্রাপ্ত x-এর মানদ্বয় (2) এ বসাইয়া y-এর অনুরূপ মানদ্বয় পাওয়া যাইবে।

x এর মানদ্বয় x_1, x_2 এবং y এর অনুরূপ মানদ্বয়, y_1, y_2 হইলে ছেদ-বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইবে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)

(i) যদি (3) এর বীজদ্বয় বাস্তব হয়,

অর্থাৎ, যদি $4a^4mc^2 - 4a^2(a^2m^2+b^2)(c^2-b^2) > 0$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $(a^2m^2+b^2)-c^2 > 0$ হয়,

তবে সরলরেখাটি উপবৃত্তকে দুইটি বাস্তব এবং পৃথক বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(ii) যদি (3) এর বীজদ্বয় সমান হয়,

অর্থাৎ, যদি $(a^2m^2+b^2)-c^2 = 0$ হয়,

তবে, সরলরেখাটি উপবৃত্তকে দুইটি বাস্তব এবং অভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(iii) যদি (3) এর বীজদ্বয় কাল্পনিক হয়, অর্থাৎ যদি $(a^2m^2+b^2)-c^2<0$ হয়, তবে সরলরেখাটি উপবৃত্তকে দুইটি কাল্পনিক বিন্দুতে ছেদ করিবে।

6·5. $\dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}-\dfrac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=1$ পরাবৃত্ত এবং $\mathbf{y}=\mathbf{mx}+\mathbf{c}$ সরলরেখার ছেদবিন্দু।

[Points of intersection of the line $y=mx+c$ and the hyperbola.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.]$$

প্রদত্ত পরাবৃত্ত হইল, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ... ... (1)

এবং প্রদত্ত রেখা হইল, $y=mx+c$ ... ... (2)

(2) হইতে y এর মান (1)-এ বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

বা, $(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2+b^2)=0$ ... ... (3)

ইহাকে সমাধান করিয়া x-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে এবং ঐ মানদ্বয় পর পর (2) এ বসাইয়া y এর অনুরূপ মানদ্বয় পাওয়া যাইবে।

x এর মানদ্বয় x_1, x_2 এবং y-এর অনুরূপ মানদ্বয় y_1, y_2 হইলে ছেদবিন্দুদ্বয় হইবে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2).

অনু. 6·4 এর মত অগ্রসর হইয়া আমরা পর পৃষ্ঠার ফলগুলি পাই ;

(i) $(a^2m^2-b^2)-c^2>0$ হইলে, সরলরেখাটি পরাবৃত্তকে দুইটি বাস্তব এবং পৃথক বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(ii) $(a^2m^2-b^2)-c^2=0$ হইলে, সরলরেখাটি পরাবৃত্তকে দুইটি বাস্তব এবং অভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(iii) $(a^2m^2-b^2)-c^2<0$ হইলে, সরলরেখাটি পরাবৃত্তকে দুইটি কাল্পনিক বিন্দুতে ছেদ করিবে।

6·6. $\mathbf{y=mx+c}$ সরলরেখা $\mathbf{x^2+y^2=a^2}$ বৃত্তকে ছেদ করিলে ছিন্ন জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[To find the length of the chord intercepted on the line $y=mx+c$ by the circle $x^2+y^2=a^2$.]

প্রদত্ত বৃত্ত হইল, $x^2+y^2=a^2$ ... ... (1)

এবং প্রদত্ত রেখা হইল, $y=mx+c$ ... ... (2)

মনে কর, (1) এবং (2) পরস্পরকে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুতে ছেদ করে। (2) হইতে y-এর মান (1) এ বসাইয়া পাই,

$$x^2+(mx+c)^2=a^2,$$

বা, $(m^2+1)x^2=2mcx+c^2-a^2=0$ ... ... (3)

x_1 এবং x_2 অবশ্যই (3) এর বীজ হইবে।

$$\therefore\ x_1+x_2=-\frac{2mc}{m^2+1} \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

$$\text{এবং}\ x_1x_2=\frac{c^2-a^2}{m^2+1} \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ... (6)

এখন, $x_2-x_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2}$

$$=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}$$

$$=\frac{2}{m^2+1}\sqrt{m^2c^2-(m^2+1)(c^2-a^2)}$$

$$=\frac{2}{m^2+1}\sqrt{(m^2+1)a^2-c^2}$$

আবার, $y_1=mx_1+c$ এবং $y_2=mx_2+c$,

$\therefore\ y_2-y_1=m(x_2-x_1)$

$\therefore$ (6) হইতে পাই,

$$\text{জ্যা এর দৈর্ঘ্য} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+m^2(x_2-x_1)^2}$$

$$=(x_2-x_1)\sqrt{1+m^2}$$

$$=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{1+m^2}}}\sqrt{\mathbf{a^2(1+m^2)-c^2}}.$$

6·7. $\mathbf{y=mx+c}$ সরলরেখা $\mathbf{y^2=4a^2}$ অধিবৃত্তকে ছেদ করিলে ছিন্ন জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[To find the length of the chord of the parabola $y^2=4ax$ intercepted on the line $y=mx+c$.]

মনে কর, প্রদত্ত রেখা এবং অধিবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2).

অধিবৃত্তের সমীকরণে y এর পরিবর্তে $mx+c$ বসাইয়া পাই,

$$(mx+c)^2=4ax,$$

$$\text{বা,}\quad m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

x_1 এবং x_2 অবশ্যই (1) এর বীজ হইবে।

$$\therefore\quad x_1+x_2=-\frac{2(mc-2a)}{m^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$$

$$\text{এবং}\quad x_1x_2=\frac{c^2}{m^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(3)$$

$$\text{নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \cdots \quad \cdots(4)$$

$$\text{এখন,}\quad x_2-x_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2}$$

$$=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_2x_1}$$

$$=\sqrt{\frac{4(mc-2a)^2}{m^4}-\frac{4c^2}{m^2}}$$

$$=\frac{2}{m^2}\sqrt{(mc-2a)^2-m^2c^2}$$

$$=\frac{2}{m^2}\sqrt{4a^2-4mca}$$

$$=\frac{4}{m^2}\sqrt{a(a-mc)}$$

আবার, $y_1=mx_1+c$, এবং $y_2=mx_2+c$,

$$\therefore\ y_2-y_1=m(x_2-x_1)$$

$\therefore$ (4) হইতে পাই,

নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=(x_2-x)\sqrt{1+m^2}$

$$=\frac{4}{\mathbf{m^2}}\sqrt{(\mathbf{1+m^2})\mathbf{a}(\mathbf{a-mc})}$$

6·8. $\mathbf{y=mx+c}$ সরলরেখা $\dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}}+\dfrac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}}=\mathbf{1}$ উপবৃত্তকে ছেদ করিলে ছিন্ন জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[To find the length of the chord intercepted on the line $y=mx+c$ by the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$]

মনে কর, প্রদত্ত রেখা প্রদত্ত উপবৃত্তকে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুতে ছেদ করে।

উপবৃত্তের সমীকরণে yএ র পরিবর্তে $mx+c$ বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

বা, $(a^2m^2+b)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0 \quad \cdots \quad \cdots(1)$

এই দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করিয়া নিশ্চয়ই ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ অর্থাৎ x_1 এবং x_2 পাওয়া যাইবে।

$$\therefore\ x_1+x_2=-\frac{2a^2m^2c}{a^2m^2+b^2} \quad \cdots \quad \cdots(2)$$

$$\text{এবং}\quad x_1x_2=\frac{a^2(c^2-b^2)}{a^2m^2+b^2} \quad \cdots \quad \cdots(3)$$

ছিন্ন জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

এখন, $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_2x_1$

$$=\frac{4a^4m^2c^2-4(a^2m^2+b^2)a^2(c^2-b^2)}{(a^2m^2c^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{4a^2b^2(a^2m^2+b^2-c^2)}{(a^2m^2+b^2)^2}$$

যেহেতু, $y_1=mx_1+c$ এবং $y_2=mx_2+c$,

$\therefore\ y_2-y_1=m(x_2-x_1)$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(x_2-x_1)^2+m^2(x_2-x_1)^2}$

$$=(x_2-x_1)\sqrt{1+m^2}$$

$$=\frac{2ab}{a^2m^2+b^2}\sqrt{a^2m^2+b^2+c^2}.\sqrt{1+m^2}.$$

6·9. $y=mx+c$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তকে ছেদ করিলে ছিন্ন জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[To find the length of the chord intercepted on the line $y=mx+c$ by the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.]

মনে কর, প্রদত্ত রেখা প্রদত্ত পরাবৃত্তকে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুতে ছেদ করে।

পরাবৃত্তের সমীকরণে y এর পরিবর্তে $mx+c$ বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

বা, $(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(b^2+c^2)=0 \cdots\cdots(1)$

ইহাকে সমাধান করিয়া যে দুইটি বীজ পাওয়া যাইবে তাহারা নিশ্চয়ই x_1 এবং x_2.

$$\therefore \quad x_1+x_2=-\frac{2a^2mc}{a^2m^2-b^2} \quad \cdots\cdots(2)$$

এবং $\quad x_1x_2=\frac{a^2(b^2+c^2)}{a^2m^2-b^2}.$

নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

এখন, $\quad (x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_2x_1$

$$=\frac{4a^4m^2c^2}{(a^2m^2-b^2)^2}-\frac{4a^2(b^2+c^2)}{a^2m^2-b^2}$$

$$=\frac{4a^4m^2c^2-4a^2(b^2+c^2)(a^2m^2-b^2)}{(a^2m^2-b^2)^2}$$

$$=\frac{4a^2b^2(b^2-a^2m^2+c^2)}{(a^2m^2-b^2)^2}.$$

যেহেতু, $\quad y_1=mx_1+c$, এবং $y_2=mx_2+c$

$$\therefore \quad y_2-y_1=m(x_2-x_1),$$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(x_2-x_1)^2+m^2(x_2-x_1)^2}$

$$= (x_2-x_1)\sqrt{1+m^2}$$

$$= \frac{2\mathbf{ab}}{\mathbf{a^2m^2-b^2}}\sqrt{\mathbf{b^2-a^2m^2+c^2}}.\sqrt{\mathbf{1+m^2}}.$$

6.10. উদাহরণমালা ।

উদা. 1. $x+y=7$ সরলরেখা $x^2+y^2=25$ বৃত্তকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the co-ordinates of the points at which the straight line $x+y=7$ cuts the circle $x^2+y^2=25$.]

$$x+y=7 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$
$$x^2+y^2=25 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

(1) হইতে পাই, $y=7-x$.

(2) এ y এর পরিবর্তে $7-x$ বসাইয়া পাই,

$$x^2+(7-x)^2=25,$$

বা, $2x^2-14x+24=0$

বা, $x^2-7x+12=0$,

বা, $(x-3)(x-4)=0$,

$\therefore$ $x=3, 4$.

x এর এই প্রাপ্ত মানদ্বয় (1) এ বসাইয়া y এর অনুরূপ মানদ্বয় 4 এবং 3 পাই।

$\therefore$ নির্ণেয় ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (3, 4) এবং (4, 3).

উদা. 2. $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ বৃত্ত $x+y=2$ সরলরেখা হইতে যে জ্যা ছিন্ন করে, তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the length of the chord intercepted by the circle $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ on the straight line $x+y=2$.]

$$x+y=2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$
$$x^2+y^2-4x+2y+4=0 \quad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে পাই, $y=2-x$.

y এর এই মান (2) এ বসাইয়া পাই,

$$x^2+(2-x)^2-4x+2(2-x)+4=0,$$

বা, $x^2-5x+6=0,$

বা, $(x-2)(x-3)=0,$

$\therefore \quad x=2, 3.$

যখন $x=2, \quad y=2-2=0.$

যখন $x=3, \quad y=2-3=-1.$

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয় $(2, 0)$ এবং $(3, -1)$.

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(2-3)^2+(0+1)^2}$

$=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$

উদা. 3. $y^2=x$ অধিবৃত্ত এবং $x-5y+6=0$ সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the co-ordinates of the point of intersection of the straight line $x-5y+6=0$ with the parabola $y^2=x$.]

$$x-5y+6=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$y^2=x \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে পাই, $x=5y-6,$

x এর এই মান (2) এ বসাইয়া পাই,

$y^2=5y-6,$

বা, $y^2-5y+6=0,$

বা, $(y-2)(y-3)=0,$

$\therefore \quad y=2$ বা $3.$

যখন $y=2, \quad x=5\times2-6=4,$

যখন $y=3, \quad x=5\times3-6=9.$

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(4, 2)$ এবং $(9, 3)$.

উদা. 4. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্ত $y=x+2$ সরলরেখা হইতে যে জ্যা ছিন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the length of the chord intercepted on the line $y=x+2$ by the ellipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.]

$$y=x+2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \cdots \quad \cdots(2)$$

(1) হইতে y এর মান (2) বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(x+2)^2}{4}=1,$$

বা, $13x^2+36x=0,$

বা, $x(13x+36)=0,$

$\therefore \quad x=0$ বা, $-\frac{36}{13}$.

যখন $x=0, \quad y=0+2=2,$

যখন $x=-\frac{36}{13}, \ y=-\frac{36}{13}+2=-\frac{10}{13}$.

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, 2)$ এবং $(-\frac{36}{13}, -\frac{10}{13})$.

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(-\frac{36}{13}-0)^2+(-\frac{10}{13}-2)^2}$

$$=\frac{1}{13}\sqrt{2(36)^2}$$

$$=\frac{36\sqrt{2}}{13}.$$

প্রশ্নমালা (Exercise) 6A

1. ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

   (i) $x+y=4$ রেখার সহিত $x^2+y^2=16$ বৃত্তের ;

   (ii) $2x+y=10$ রেখার সহিত $x^2+y^2=25$ বৃত্তের ;

   (iii) $x+y=3$ রেখার সহিত $x^2+y^2=9$ বৃত্তের ;

   (iv) $3x+4y+7=0$ রেখার সহিত $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ বৃত্তের ;

   [Find the co-ordinates of the points of intersection

   (i) of the line $x+y=4$ with the circle $x^2+y^2=16$;

   (ii) of the line $2x+y=10$ with the circle $x^2+y^2=25$;

   (iii) of the line $x+y=3$ with the circle $x^2+y^2=9$;

   (iv) of the line $3x+4y+7=0$ with the circle $x^2+y^2-4x-6y-12=0$.] ...

2. ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $2y=x+6$ রেখার সহিত $y^2=8x$ অধিবৃত্তের ;

(ii) $y=3x-a$ রেখার সহিত $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের ;

(iii) $y=x-4$ রেখার সহিত $y=2x$ অধিবৃত্তের ;

(iv) $5y+9x-5=0$ রেখার সহিত $5y^2=12x$ অধিবৃত্তের।

[Find the points of intersection

(i) of the line $2y=x+6$ with the parabola $y^2=8x$;

(ii) of the line $y=3x-a$ with the parabola $y^2=4ax$;

(iii) of the line $y=x-4$ with the parabola $y^2=2x$;

(iv) of the line $5y+9x-5=0$ with the parabola $5y^2=12x$.]

3. ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $x+2y=6$ সরলরেখার সহিত $x^2+4y^2=36$ উপবৃত্তের ;

(ii) $2x+3y=6$ রেখার সহিত $4x^2+9y^2=36$ উপবৃত্তের ;

(iii) $x+y-4=0$ রেখার সহিত $3x^2+5y^2=32$ উপবৃত্তের ;

(iv) $3x-7y+25=0$ রেখার সহিত $3x^2+7y^2=115$ উপবৃত্তের

[Find the co-ordinate of the points of intersection

(i) of the line $x+2y=6$ with the ellipse $x^2+4y^2=36$;

(ii) of the line $2x+3y=6$ with the ellipse $4x^2+9y^2=36$;

(iii) of the line $x+y-4=0$ with the ellipse $3x^2+5y^2=32$;

(iv) of the line $3x-7y+25=0$ with the ellipse $3x^2+7y^2=115$.]

4. ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $2y=x+1$ সরলরেখার সহিত $5x^2-4y^2=1$ পরাবৃত্তের।

(ii) $2x+3y=1$ সরলরেখার সহিত $2x^2-3y^2=5$ পরাবৃত্তের।

[Find the co-ordinates of the points of intersection

(i) of the line $2y=x+1$ with the hyperbola $5x^2-4y^2=1$;

(ii) of the line $2x+3y=1$ with the hyperbola $2x^2-3y^2=5$]

5. $x^2+y^2=25$ বৃত্ত $y=3x+5$ সরলরেখা হইতে যে জ্যা ছিন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the length of the chord intercepted on the line $y=3x+5$ by the circle $x^2+y^2=25$.]

6. $x^2+y^2=20$ বৃত্ত $x+y=2$ সরলরেখা হইতে যে জ্যা ছিন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the length of the chord intercepted on the line $x+y=2$ by the circle $x^2+y^2=20$.]

7. $x^2+y^2+6x+8y-49=0$ বৃত্ত $x+y=5$ সরলরেখা হইতে যে জ্যা ছিন্ন করে,তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the length of the chord intercepted on the line $x+y=5$ by the circle $x^2+y^2+6x+8y-49=0$.]

8. $y^2=4x$ অধিবৃত্ত $2x+y=3$ সরলরেখা হইতে যে জ্যা ছিন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the length of the chord intercepted on the line $2x+y=3$ by the parabola $y^2=4x$.]

9. $x^2+2y^2=17$ উপবৃত্ত $y=x+1$ সরলরেখা হইতে যে জ্যা ছিন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the length of the chord intercepted on the line $y=x+1$ by the ellipse $x^2+2y^2=17$.]

10. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ পরাবৃত্তের যে জ্যা মূলবিন্দু দিয়া যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

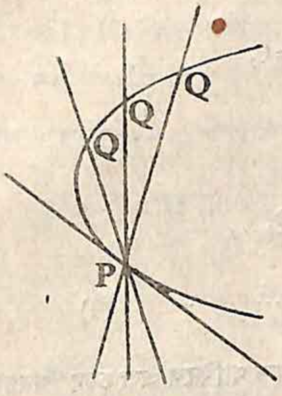
[Obtain the length of the chord of the hyperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$, passing through the origin and making equal angles with the axes.]

11. $y=mx$ সরলরেখা বরাবর $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

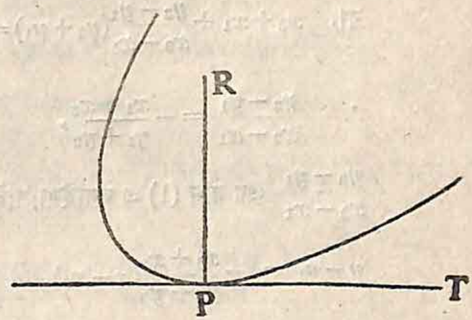
[Find the length of the chord of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ along the line $y=mx$.]

6·11. স্পর্শক ও অভিলম্ব (Tangent and normal)

মনে কর, কোন বৃত্ত বা কনিকের উপরিস্থিত P ও Q দুইটি সন্নিহিত বিন্দু। [চিত্র 61] $\overleftrightarrow{PQ}$ যোগ কর।



চিত্র 61



চিত্র 62

এখন P কে কেন্দ্র করিয়া $\overleftrightarrow{PQ}$ সরলরেখাকে ঘুরাইতে থাকিলে Q বিন্দু ঐ বৃত্ত বা কনিক বরাবর ক্রমশঃ P বিন্দুর নিকটতর হইতে থাকিবে এবং চরম অবস্থায় উহা P বিন্দুর সহিত মিলিত হইবে। এই চরম অবস্থানে $\overleftrightarrow{PQ}$ জ্যা কে বৃত্ত বা কনিকের P বিন্দুতে **স্পর্শক** বলা হয় এবং P কে বলা হয় **স্পর্শবিন্দু** (point of contact)।

স্পর্শবিন্দুগামী যে সরলরেখা স্পর্শকের উপর লম্ব তাহাকে **অভিলম্ব** বলে।

চিত্র 62 তে $\overleftrightarrow{PT}$ স্পর্শক এবং $\overleftrightarrow{PR}$ অভিলম্ব।

6·12. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the tangent to the circle $x^2+y^2=a^2$ at the point (x_1, y_1) on it.]

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দুটি $P(x_1, y_1)$. বৃত্তের উপর ঐ বিন্দুর নিকটবর্তী অপর একটি বিন্দু $Q(x_2, y_2)$ নও।

এখন $\overleftrightarrow{PQ}$ জ্যা এর সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

যেহেতু, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বৃত্তের উপর অবস্থিত,

$$\therefore \; x_1^2+y_1^2=a^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$\text{এবং } \; x_2^2+y_2^2=a^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(3) হইতে (2) কে বিয়োগ করিয়া পাই,

$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0,$$

বা, $(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0,$

বা, $x_2 + x_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(y_2 + y_1) = 0,$

$$\therefore \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2},$$

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ এর মান (1) এ বসাইয়া পাই,

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

এখন Q বিন্দু বৃত্ত বরাবর P এর দিকে আসিতে থাকিলে এবং চরম অবস্থায় P এর সহিত মিলিত হইলে, $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ হইবে।

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y - y_1 = -\frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1),$$

বা, $y - y_1 = -\dfrac{x_1}{y_1}\left(x - x_1\right),$

বা, $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2,$

বা, $\mathbf{xx_1 + yy_1 = a^2}$, $\quad [\because \; x_1^2 + y_1^2 = a^2]$

6 13. $\mathbf{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0}$ বৃত্তের $(\mathbf{x_1, y_1})$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ।

[To find the equation of the tangent to the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ at the point (x_1, y_1) on it.]

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দু $P(x_1, y_1)$; বৃত্তের উপর P বিন্দুর নিকটবর্তী অপর একটি বিন্দু $Q(x_2, y_2)$ লও।

এখন, $\overline{PQ}$ জ্যা এর সমীকরণ,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) \cdots\cdots (1)$$

যেহেতু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore \quad x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

এবং $x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

(3) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2+2g(x_2-x_1)+2f(y_2-y_1)=0.$$

উভয় পক্ষকে x_2-x_1 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$x_2+x_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(y_2+y_1)+2g+2f\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0,$$

$$\text{বা,}\quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f},$$

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ এর মান (1) এ বসাইয়া পাই,

$$y-y_1=-\frac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}(x-x_1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

ইহাও $\overline{PQ}$ জ্যা এরই সমীকরণ।

এখন Q বিন্দু, বৃত্ত বরাবর P এর দিকে ক্রমশঃ অগ্রসর হইয়া চরম অবস্থায় P এর সহিত মিলিত হইলে, $x_2=x_1$, $y_2=y_1$ হইবে।

$\therefore$ (4) এ $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ বসাইলে স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

সুতরাং, স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y-y_1=-\frac{2x_1+2g}{2y_1+2f}(x-x_1),$$

$$\text{বা,}\quad y-y_1=-\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1),$$

$$\text{বা,}\quad xx_1+yy_1+gx+fy=x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1,$$

$$\text{বা,}\quad xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c$$
$$=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c,$$

$$\text{বা,}\quad \mathbf{xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.}$$

$$[\because\ x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0\,]$$

দ্রষ্টব্য। লক্ষণীয় যে, বৃত্ত বা কনিকের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইলে, বৃত্ত বা কনিকের সমীকরণের $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{y}^2$, $\mathbf{2x}$, $\mathbf{2y}$ পদগুলির পরিবর্তে যথাক্রমে $\mathbf{xx_1}$, $\mathbf{yy_1}$, $\mathbf{x+x_1}$, $\mathbf{y+y_1}$, বসাইতে হইবে।

$\mathbf{2xy}$ পদ থাকিলে তাহার পরিবর্তে $\mathbf{xy_1+x_1y}$ বসাইতে হইবে।

6·14. $\mathbf{x^2+y^2=a^2}$ বৃত্তের $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1})$ বিন্দুতে অভিলম্বের (Normal এর) সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation to the normal at the point (x_1, y_1) of the circle $x^2+y^2=a^2$]

আমরা জানি, বৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অভিলম্ব বৃত্তের কেন্দ্রগামী।

সুতরাং, প্রদত্ত বিন্দু এবং বৃত্তের কেন্দ্রের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরলরেখাই অভিলম্ব।

এখানে বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0)

∴ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y-0=\frac{y_1-0}{x_1-0}(x-0),$$

বা, $\mathbf{xy_1-yx_1=0}$.

বিকল্প পদ্ধতি :

আমরা জানি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1+yy_1=a^2$,

$$\text{বা,} \quad y=-\frac{x_1}{y_1}x+\frac{a^2}{y_1} \cdots\cdots (1)$$

ইহার $\text{gradient}=-\dfrac{x_1}{y_1}$.

অভিলম্ব স্পর্শকের উপর লম্ব বলিয়া উহার gradient $=\dfrac{y_1}{x_1}$.

এখন (x_1, y_1) বিন্দুগামী যে সরলরেখার gradient $\dfrac{y_1}{x_1}$, তাহাই নির্ণেয় অভিলম্ব।

∴ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$$

বা, $\mathbf{xy_1-yx_1=0}$.

6·15. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের (Normal এর) সমীকরণ নির্ণয়।

[**To find the equation to the normal of the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ at the point (x_1, y_1) on it.**]

অভিলম্ব (x_1, y_1) এবং প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র অর্থাৎ $(-g, -f)$গামী।

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1),$$

বা, $\mathbf{x(y_1+f)-y(x_1+g)+gy_1-fx_1=0}$.

বিকল্প পদ্ধতি।

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল,

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$$

ইহার gradient $=-\dfrac{x_1+g}{y_1+f}$.

$\therefore$ অভিলম্বের gradient $=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1),$$

বা, $\mathbf{x(y_1+f)-y(x_1+g)+gy_1-fx_1=0}$.

দ্রষ্টব্য। বৃত্তের কেন্দ্রগামী যে কোন সরলরেখাই বৃত্তের একটি অভিলম্ব।

6·16. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ।

[To find the equation of the tangent at the point (x_1, y_1) of the parabola $y^2=4ax$.]

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দুটি $P(x_1, y_1)$। অধিবৃত্তের উপর P এর নিকটবর্তী অপর একটি বিন্দু $Q(x_2, y_2)$ লও।

তাহা হইলে $\overline{PQ}$ জ্যা এর সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

যেহেতু, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad y_1^2 = 4ax_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$
$$y_2^2 = 4ax_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(3) হইতে (2) কে বিয়োগ করিয়া পাই,

$$y_2^2 - y_1^2 = 4a(x_2 - x_1).$$

উভয় পক্ষকে $x_2 - x_1$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(y_2 + y_1) = 4a,$$

$$\therefore \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4a}{(y_2 + y_1)},$$

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ এর মান (1) এ বসাইয়া পাই,

$$y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1) \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

ইহা $\overline{PQ}$ জ্যা এরই সমীকরণ।

এখন, Q বিন্দু, অধিবৃত্ত বরাবর P এর দিকে ক্রমশঃ অগ্রসর হইয়া চরম অবস্থায় P এর সহিত মিলিত হইলে $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ হইবে।

সুতরাং (4)-এ x_2 এর পরিবর্তে x_1 এবং y_2-এর পরিবর্তে y_1 বসাইলেই P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1),$$

বা, $y - y_1 = \dfrac{2a}{y_1}(x - x_1),$

বা, $yy_1 = y_1^2 + 2ax - 2ax_1,$

বা, $yy_1 = 4ax_1 + 2ax - 2ax_1,$

বা, $\mathbf{yy_1 = 2a(x + x_1)}.$

6·17. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের (Normal এর) সমীকরণ।

[To find the equation of the normal to the parabola $y^2=4ax$ at the point (x_1, y_1).]

(x_1, y_1) বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ,

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

প্রদত্ত অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$yy_1=2a(x+x_1).$$

$$\text{ইহার gradient}=\frac{2a}{y_1}.$$

যেহেতু, (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্ব ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব,

$$\therefore \text{ অভিলম্বের gradient}=-\frac{y_1}{2a},$$

$$\text{অর্থাৎ, } m=-\frac{y_1}{2a}$$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1), \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

বা, $2a(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0,$

বা, $\mathbf{y_1x+2ay=y_1(x_1+2a)}.$

6·18. Equation of the normal in terms of its gradient.

মনে কর, অধিবৃত্তের অভিলম্বের gradient$=m$

তাহা হইলে, $m=-\dfrac{y_1}{2a}$

$$\therefore \; \mathbf{y_1=-2am}.$$

যেহেতু (x_1, y_1) অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত,

$$\therefore \; y_1{}^2=4ax_1$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{y_1^2}{4a} = \frac{4a^2m^2}{4a}$$

$$\text{বা,} \quad x_1 = am^2.$$

x_1 এবং y_1 এর মান অনুঃ 6·17 এর (2) এ বসাইয়া পাই,

$$y + 2am = m(x - am^2),$$

$$\text{বা,} \quad y = mx - 2am - am^3. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (3)$$

দেখা যাইতেছে যে m এর যে কোন মানের জন্য (3) সমীকরণটি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $(am^2, -2am)$ বিন্দুতে অভিলম্ব।

6·19. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ।

[To find the equation of the tangent at the point (x_1, y_1) of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$]

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দুটি P (x_1, y_1) ; উপবৃত্তের উপর P এর নিকটবর্তী অপর একটি বিন্দু Q (x_2, y_2) লও।

এখন $\overleftrightarrow{PQ}$ জ্যা এর সমীকরণ,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

যেহেতু, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় উপবৃত্তের উপর অবস্থিত,

$$\text{সুতরাং,} \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

$$\text{এবং} \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \qquad \cdots \quad (3)$$

(3) হইতে (2) কে বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0,$$

উভয় পক্ষকে x_2-x_1 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{x_2+x_1}{a^2}+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{b^2}=0,$$

$$\therefore\ \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$$

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$-এর মান (1) এ বসাইয়া পাই,

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}(x-x_1)\cdots\qquad\cdots(4)$$

ইহা $\overleftrightarrow{PQ}$ জ্যা-এর সমীকরণ।

এখন, Q বিন্দু, উপবৃত্ত বরাবর ক্রমশঃ P এর দিকে অগ্রসর হইয়া চরম অবস্থায় P-এর সহিত মিলিত হইলে $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ হইবে।

সুতরাং, (4)-এ x_2 এর পরিবর্তে x_1 এবং y_2 এর পরিবর্তে y_1 বসাইলে নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2x_1}{2y_1}(x-x_1),$$

বা, $$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$

বা, $$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2},$$

বা, $$\mathbf{\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.}$$

6·20. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের (Normal-এর) সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the normal at the point (x_1, y_1) of the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.]

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

ইহার gradient $= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$.

সুতরাং, অভিলম্বের gradient $= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_1}{x_1}$.

এখন (x_1, y_1) বিন্দুগামী যে সরলরেখার gradient $= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_1}{x_1}$ তাহাই নির্ণেয় অভিলম্ব।

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y - y_1 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$$

$$\text{বা, } \frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2.$$

6·21. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে (i) স্পর্শকের (ii) অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়।**

[To find the equation of (i) the tangent (ii) the normal to the hyperbola at the point (x_1, y_1).]

যেহেতু, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের সমীকরণে b^2 এর পরিবর্তে $-b^2$ লিখিলেই $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্ত পাওয়া যায়, সুতরাং, অনু. 6·19 এবং 6·20 এর মত অগ্রসর হইয়া পরাবৃত্তের স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করিলে,

স্পর্শকের সমীকরণ হইবে, $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \cdots \quad \cdots \quad \cdots (1)$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ হইবে, $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2 \cdots \quad \cdots (2)$

Calculus-এর সাহায্যে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়।

6·22. $y = f(x)$ **বক্ররেখার (curve-এর) (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়।**

[To find the equation of the tangent and the normal to the curve $y = f(x)$ at the point (x, y).]

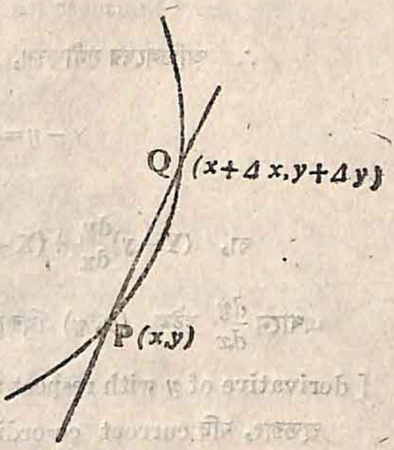
মনে কর, প্রদত্ত বিন্দুটি $P(x, y)$; curve-এর উপর P-এর নিকটবর্তী অপর একটি বিন্দু $Q(x+\triangle x, y+\triangle y)$ লও।

[এখানে $\triangle x$ এবং $\triangle y$ যথাক্রমে x এবং y-এ increment (বৃদ্ধি)।]

Current co-ordinates-দ্বয়কে X এবং Y দ্বারা সূচিত করিলে PQ ছেদক (জ্যা)-এর সমীকরণ হইবে,

$$Y-y=\frac{(y+\triangle y)-y}{(x+\triangle x)-x}(X-x),$$

$$\text{বা,}\quad Y-y=\frac{\triangle y}{\triangle x}(X-x) \quad \cdots(1)$$



চিত্র 63

এখন, Q বিন্দু curve বরাবর P-এর দিকে ক্রমশঃ অগ্রসর হইতে থাকিলে চরম অবস্থায় $\overleftrightarrow{PQ}$ ছেদকটি curve-এর P বিন্দুতে স্পর্শক হইবে।

কিন্তু Q, P-এর দিকে অগ্রসর হইলে $\triangle x$ এবং $\triangle y$, (0) শূন্যের দিকে অগ্রসর হইবে, অর্থাৎ $\triangle x \rightarrow 0$ এবং $\triangle y \rightarrow 0$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হইবে

$$Y-y=\underset{\triangle x\rightarrow 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{\triangle y}{\triangle x}(X-x)$$

$$\text{বা,}\quad Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x) \cdots \quad \cdots(2)$$

অভিলম্বের (Normal-এর) সমীকরণ।

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, কোন curve-এর কোন বিন্দুতে অভিলম্ব বলিতে ঐ বিন্দুগামী এবং ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব সরলরেখাকে বুঝায়।

আমরা ইহাও জানি যে, দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হইলে একটির Gradient অপরটির ঋণাত্মক অন্যোন্যক (Negative reciprocal) হইবে।

(2) হইতে দেখিতে পাই,

$$\text{স্পর্শকের Gradient}=\frac{dy}{dx}.$$

$\therefore$ অভিলম্বের Gradient $= -\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ,

$$Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x)$$

বা, $$(Y - y)\frac{dy}{dx} + (X - x) = 0 \quad \cdots \quad \cdots (3)$$

এখানে $\frac{dy}{dx}$ হইল, (x, y) বিন্দুতে x-এর সাপেক্ষে y-এর ডেরিভেটিব [derivative of y with respect to x at the point (x, y).]

স্থতরাং, যদি current co-ordinates দ্বয়কে x এবং y দ্বারা, প্রদত্ত বিন্দুকে (x_1, y_1) দ্বারা এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে x-এর সাপেক্ষে y-এর derivative-কে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)}$ দ্বারা স্থচিত করা যায়, তবে স্পর্শকের সমীকরণ হইবে,

$$Y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)}(X - x_1) \cdots \quad \cdots (4)$$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ হইবে,

$$(Y - y_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)} + (X - x_1) = 0 \quad \cdots (5)$$

স্থত্র (4) এবং (5)-এর সাহায্যে বৃত্ত এবং বিভিন্ন কনিকের স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ কিরূপে নির্ণয় করা যায় তাহা নিম্নে দেখান হইল।

I. বৃত্ত।

মনে কর, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = a^2 \cdots \quad \cdots \quad \cdots (5)$

এবং প্রদত্ত বিন্দু (x_1, y_1).

যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি (5) বৃত্তের উপর অবস্থিত

$$\therefore\ x_1^2 + y_1^2 = a^2 \cdots \quad \cdots \quad \cdots (6)$$

(5) এর উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে differentiate করিয়া পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y},$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)}=-\frac{x_1}{y_1}.$$

সুতরাং, (4) নং সূত্র হইতে স্পর্শকের সমীকরণ পাই,

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$

বা, $yy_1-y_1^2=-xx_1+x_1^2,$

বা. $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2,$

বা, $\mathbf{xx_1+yy_1=a^2}.$

সূত্র (5) হইতে অভিলম্বের সমীকরণ পাই,

$$(y-y_1)\left(-\frac{x_1}{y_1}\right)+(x-x_1)=0,$$

বা, $-x_1y+x_1y_1+xy_1-x_1y_1=0,$

বা, $\mathbf{xy_1-x_1y=0}.$

II. অধিবৃত্ত।

মনে কর, অধিবৃত্তটি $y^2=4ax$ ... ...(7)

এবং প্রদত্ত বিন্দুটি (x_1, y_1).

যেহেতু, (x_1, y_1) বিন্দুটি (7) অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত,

সুতরাং, $y_1^2=4ax_1$ ... ...(8)

(7) এর উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে differentiate করিয়া পাই,

$$2y\frac{dy}{dx}=4a,$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{4a}{2y}=\frac{2a}{y},$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)}=\frac{2a}{y_1},$$

এখন (4) নং সূত্র হইতে স্পর্শকের সমীকরণ পাই,

$$y-y_1=\frac{2a}{y_1}(x-x_1),$$

বা, $yy_1-y_1^2=2ax-2ax_1$,

বা, $yy_1-4ax_1=2ax-2ax_1$,

বা, $\mathbf{yy_1=2a(x+x_1)}$.

সূত্র (5) হইতে অভিলম্বের সমীকরণ পাই,

$$(y-y_1)\frac{2a}{y_1}+(x-x_1)=0,$$

বা, $\mathbf{2a(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0}$.

III. উপবৃত্ত।

মনে কর, প্রদত্ত উপবৃত্ত $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ....(9)

এবং প্রদত্ত বিন্দু (x_1, y_1).

যেহেতু, (x_1, y_1) বিন্দুটি (9) উপবৃত্তের উপর অবস্থিত

$$\therefore \quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots(10)$$

(9) এর উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে differentiate করিয়া পাই,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2x}{2y}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y},$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$$

এখন, সূত্র (4) হইতে স্পর্শকের সমীকরণ পাই,

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$

বা, $\dfrac{yy_1-y_1^2}{b^2}=\dfrac{xx_1-x_1^2}{a^2}$,

$$\text{বা,}\quad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2},$$

$$\text{বা,}\quad \mathbf{\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.}$$

সূত্র (5) হইতে অভিলম্বের সমীকরণ পাই,

$$(y-y_1)\left(-\frac{b^2}{a^2}\ \frac{x_1}{y_1}\right)+(x-x_1)=0$$

$$\text{বা,}\quad \mathbf{\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2.}$$

IV. পরাবৃত্ত।

মনে কর, পরাবৃত্তটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ...(11)

এবং প্রদত্ত বিন্দুটি (x_1, y_1).

যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি (11) পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত

$$\therefore\quad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots(12)$$

(11) এর উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে differentiate করিয়া পাই,

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2x}{2y}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$$

$$\therefore\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$$

$\therefore$ সূত্র (4) হইতে স্পর্শকের সমীকরণ পাই,

$$y-y_1=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$

$$\text{বা,}\quad \frac{yy_1-y_1^2}{b^2}=\frac{xx_1-x_1^2}{a^2},$$

$$\text{বা,}\quad \frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2},$$

$$\text{বা,}\quad \frac{\mathbf{xx_1}}{\mathbf{a^2}} - \frac{\mathbf{yy_1}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$$

সূত্র (5) হইতে অভিলম্বের সমীকরণ পাই,

$$(y-y_1)\left(\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}\right)+(x-x_1)=0.$$

$$\frac{\mathbf{a^2x}}{\mathbf{x_1}}+\frac{\mathbf{b^2y}}{\mathbf{y_1}}=\mathbf{a^2+b^2}.$$

6·23. উদাহরণমালা।

উদা. 1. $x^2+y^2=100$ বৃত্তের $(-6, 8)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the tangent and normal to the circle $x^2+y^2=100$ at the point $(-6, 8)$.]

(x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$xx_1+yy_1=100$$

এখানে $x_1=-6$, $y_1=8$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$$x(-6)+y.8=100,$$

$$\text{বা,}\quad 3x-4y+50=0.$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$xy_1-yx_1=0.$$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$x.8-y(-6)=0.$$

$$\text{বা,}\quad 4x+3y=0.$$

Calculus-এর সাহায্যে নির্ণয়।

প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2=100$

x-এর সাপেক্ষে differentiate করিয়া পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-6,\ 8)} = -\frac{-6}{8} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $y-8=\frac{3}{4}(x+6)$,

বা, $3x-4y+50=0$.

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $(y-8).\frac{3}{4}+(x+6)=0$,

বা, $4x+3y=0$

উদা. 2. $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ বৃত্তের (3, 5) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the tangent and normal to the circle $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ at the point (3, 5).]

প্রদত্ত বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$xx_1+yy_1+(x+x_1)-2(y+y_1)-20=0.$$

এখানে, $x_1=3$, এবং $y_1=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$$x.3+y.5+(x+3)-2(y+5)-20=0,$$

বা, $4x+3y-27=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

এখন, অভিলম্ব (1) এর সহিত লম্ব এবং (3, 5) বিন্দুগামী।

(1) এর সহিত লম্ব যে কোন রেখার সমীকরণ হইল,

$$3x-4y+k=0$$

ইহা, (3, 5) বিন্দুগামী বলিয়া,

$$3.3-4.5+k=0$$

$$\therefore \quad k=11.$$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$3x-4y+11=0.$$

Calculus এর সাহায্যে নির্ণয়।

প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2x-4y-20=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

x-এর সাপেক্ষে differentiate করিয়া পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+2-4\frac{dy}{dx}=0.$$

বা, $\frac{dy}{dx}(2y-4)=-(2x+2)$,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+2}{2y-4}=-\frac{x+1}{y-2}.$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3,\,5)}=-\frac{3+1}{5-2}=-\frac{4}{3}.$$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$$(y-5)=-\frac{4}{3}(x-3)$$

বা, $4x+3y-27=0$

নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$(y-5)\left(-\frac{4}{3}\right)+(x-3)=0,$$

বা, $3x-4y+11=0$.

উদা. 3. $y^2=16x$ অধিবৃত্তের (4, 8) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the tangent and the normal to the parabola $y^2=16x$ at the point (4, 8).]

(x_1, y_1) বিন্দুতে প্রদত্ত অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$yy_1=8(x+x_1)$$

এখানে $x_1=4$ এবং $y_1=8$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y.8=8(x+4),$$

বা, $y=x+4$.

ইহার gradient $=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের gradient $=-\frac{1}{1}=-1$.

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y-8=(-1)(x-4),$$

বা, $x+y=12$.

Calculus এর সাহায্যে নির্ণয়।

প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ, $y^2=16x$ ... ... (1)

x-এর সাপেক্ষে differentiate করিয়া পাই,

$$2y\frac{dy}{dx}=16.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{16}{2y}=\frac{8}{y}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,\ 8)}=\frac{8}{8}=1.$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y-8=1.(x-4),$$

বা, $y=x+4.$

নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$(y-8)\,1+(x-4)=0,$$

বা, $x+y=12.$

উদা. 4. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তের $\left(\dfrac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations of the tangent and the normal to the ellipse $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ at the point $\left(\dfrac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$.]

প্রদত্ত উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$\frac{xx_1}{25}+\frac{yy_1}{9}=1.$$

এখানে $x_1=\frac{10}{3}$ এবং $y_1=\sqrt{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$$\frac{x\frac{10}{3}}{25}+\frac{y.\sqrt{5}}{9}=1,$$

বা, $\dfrac{2x}{15}+\dfrac{y\sqrt{5}}{9}=1,$

বা, $6x+5\sqrt{5}y=45.$

ইহার gradient $= -\dfrac{6}{5\sqrt{5}}$.

$\therefore$ অভিলম্বের gradient $= \dfrac{5\sqrt{5}}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y - \sqrt{5} = \frac{5\sqrt{5}}{6}\left(x - \frac{10}{3}\right),$$

বা, $6y - 6\sqrt{5} = 5\sqrt{5}x - \dfrac{50\sqrt{5}}{3}$

বা, $18y - 18\sqrt{5} = 15\sqrt{5}x - 50\sqrt{5}$,

বা, $15\sqrt{5}x - 18y - 32\sqrt{5} = 0.$

Calculus এর সাহায্যে নির্ণয়।

প্রদত্ত উপবৃত্ত হইল, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ ... ... (1)

x-এর সাপেক্ষে differentiate করিয়া পাই,

$$\frac{2x}{25} + \frac{2y}{9}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{9}{25}\cdot\frac{x}{y}.$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(\frac{10}{3},\ \sqrt{5})} = -\frac{9}{25}\cdot\frac{\frac{10}{3}}{\sqrt{5}} = -\frac{6}{5\sqrt{5}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y - \sqrt{5} = -\frac{6}{5\sqrt{5}}\left(x - \frac{10}{3}\right).$$

বা, $6x + 5\sqrt{5}y = 45.$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$$(y - \sqrt{5})\left(-\frac{6}{5\sqrt{5}}\right) + \left(x - \frac{10}{3}\right) = 0,$$

বা, $15\sqrt{5}x - 18y - 32\sqrt{5} = 0.$

প্রশ্নমালা (Exercise) 6B

1. নিম্নের প্রত্যেক বৃত্তের প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

    (i) $x^2+y^2=58$ বৃত্তের $(-3, 7)$ বিন্দুতে।

    (ii) $x^2+y^2=20$ বৃত্তের $(-2, 4)$ বিন্দুতে।

    (iii) $x^2+y^2+4x+6y-87=0$ বৃত্তের $(4, 5)$ বিন্দুতে।

    (iv) $x^2+y^2+x-2y=0$ বৃত্তের $(0, 0)$ বিন্দুতে।

[Find the equation of the tangent to the circle :

(i) $x^2+y^2=58$ at the point $(-3, 7)$.

(ii) $x^2+y^2=20$ at the point $(-2, 4)$.

(iii) $x^2+y^2+4x+6y-87=0$ at the point $(4,5)$.

(iv) $x^2+y^2+x-2y=0$ at the point $(0, 0)$].

2. নিম্নের প্রত্যেক বৃত্তের প্রদত্ত বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :

    (i) $x^2+y^2=29$ বৃত্তের $(2, 5)$ বিন্দুতে।

    (ii) $x^2+y^2=40$ বৃত্তের $(2, 6)$ বিন্দুতে।

    (iii) $x^2+y^2+2x-6y-12=0$ বৃত্তের $(-3, 5)$ বিন্দুতে।

    (iv) $x^2+y^2+4x-6y+5=0$ বৃত্তের $(-4, 5)$ বিন্দুতে।

[Find the equation to the normal to the circle :

(i) $x^2+y^2=29$ at the point $(2, 5)$.

(ii) $x^2+y^2=40$ at the point $(2, 6)$.

(iii) $x^2+y^2+2x-6y-12=0$ at the point $(-3, 5)$.

(iv) $x^2+y^2+4x-6y+5=0$ at the point $(-4, 5)$.]

3. নিম্নের প্রত্যেক অধিবৃত্তের প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

    (i) $y^2=9x$ অধিবৃত্তের $(4, -6)$ বিন্দুতে।

    (ii) $y^2=-16x$ অধিবৃত্তের $(-1, -4)$ বিন্দুতে।

    (iii) $x^2=-12y$ অধিবৃত্তের $(6, -3)$ বিন্দুতে।

    (iv) $x^2=2(y+1)$ অধিবৃত্তের $(-2, 1)$ বিন্দুতে।

    (v) $x=y^2-3y+7$ অধিবৃত্তের $(5, 2)$ বিন্দুতে।

[Find the equation of the tangent to the parabola

(i) $y^2=9x$ at the point $(4, -6)$.

(ii) $y^2 = -16x$ at the point $(-1, -4)$.
(iii) $x^2 = -12y$ at the point $(6, -3)$,
(iv) $x^2 = 2(y+1)$ at the point $(-2, 1)$.
(v) $x = y^2 - 3y + 7$ at the point $(5, 2)$].

4. নিম্নের প্রত্যেক অধিবৃত্তের প্রদত্ত বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $y^2 = 8x$ অধিবৃত্তের $(2, -4)$ বিন্দুতে।
(ii) $x^2 = 16y$ অধিবৃত্তের $(4, 1)$ বিন্দুতে।
(iii) $y^2 = -4x$ অধিবৃত্তের $(-4, 4)$ বিন্দুতে।
(iv) $y^2 = -12x$ অধিবৃত্তের $(-3, 6)$ বিন্দুতে।

[Find the equation to the normal to the parabola
(i) $y^2 = 8x$ at the point $(2, -4)$.
(ii) $x^2 = 16y$ at the point $(4, 1)$.
(iii) $y^2 = -4x$ at the point $(-4, 4)$.
(iv) $y^2 = -12x$ at the point $(-3, 6)$].

5. নিম্নের প্রত্যেকটি উপবৃত্তের প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $3x^2 + 4y^2 = 84$ উপবৃত্তের $(4, -3)$ বিন্দুতে।
(ii) $2x^2 + 3y^2 = 56$ উপবৃত্তের $(2, 4)$ বিন্দুতে।
(iii) $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ উপবৃত্তের $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ বিন্দুতে।

[Find the equation of the tangent to the ellipse :
(i) $3x^2 + 4y^2 = 84$ at the point $(4, -3)$.
(ii) $2x^2 + 3y^2 = 56$ at the point $(2, 4)$
(iii) $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ at the point $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$].

6. নিম্নের প্রত্যেকটি উপবৃত্তের প্রদত্ত বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $3x^2 + 5y^2 = 120$ উপবৃত্তের $(5, -3)$ বিন্দুতে।
(ii) $3x^2 + 4y^2 = 48$ উপবৃত্তের $(-2, 3)$ বিন্দুতে।
(iii) $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ উপবৃত্তের $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ বিন্দুতে।

[Find the equation of the normal to the ellipse :
(i) $3x^2 + 5y^2 = 120$ at the point $(5, -3)$.
(ii) $3x^2 + 4y^2 = 48$ at the point $(-2, 3)$.

(iii) $x^2+xy+2y^2=1$ at the point $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$].

7. নিম্নের প্রত্যেকটি পরাবৃত্তের প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $3x^2-8y^2=16$ পরাবৃত্তের $(4, -2)$ বিন্দুতে।

(ii) $x^2+4xy-y^2=4$ পরাবৃত্তের $(5, -1)$ বিন্দুতে।

[Find the equations of the tangent and normal to the hyperbola :

(i) $3x^2-8y^2=16$ at the point $(4, -2)$.

(ii) $x^2+4xy-y^2=4$ at the point $(5, -1)$].

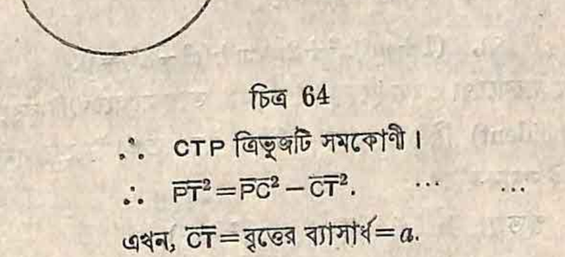
6·24. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য (Length of the tangent)

বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[To find the length of the tangent from a given external point to a given circle.]

(i) মনে কর, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$, এবং নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দুটি $P(x_1, y_1)$.

মনে কর, $\overline{PT}$, P হইতে প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক। C বৃত্তের কেন্দ্র হইলে $\overline{CT}$, $\overline{TP}$-এর উপর লম্ব।



চিত্র 64

$\therefore$ CTP ত্রিভুজটি সমকোণী।

$\therefore$ $\overline{PT}^2=\overline{PC}^2-\overline{CT}^2$. ... ... (1)

এখন, $\overline{CT}$ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= a$.

এবং C-এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$.

$\therefore$ (1) হইতে পাই,

$$\overline{PT}^2=(x_1-0)^2+(y_1-0)^2-a^2$$
$$=\mathbf{x_1^2+y_1^2-a^2}.$$

(ii) মনে কর, প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

ইহার ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$,

এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$.

$\therefore$ (1) হইতে পাই,

$$\overline{PT}^2=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2-(g^2+f^2-c)$$
$$=\mathbf{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}.$$

দ্রষ্টব্য। দেখা যাইতেছে যে, বৃত্তের সমীকরণের ডান পক্ষ শূন্য হইলে, বামপক্ষে x ও y এর পরিবর্তে যথাক্রমে x_1 এবং y_1 লিখিলেই স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের বর্গ পাওয়া যাইবে।

6·25. স্পর্শক হইবার সর্ত (Condition of tangency).

$y=mx+c$ সরলরেখার কোন বৃত্তের বা কনিকের স্পর্শক হইবার সর্ত নির্ণয় করিতে হইলে, c-এর এমন মান নির্ণয় করিতে হইবে যাহাতে $y=mx+c$ স্পর্শক হইতে পারে।

6·26. $\mathbf{y=mx+c}$ সরলরেখার $\mathbf{x^2+y^2=a^2}$ বৃত্তের স্পর্শক হইবার সর্ত নির্ণয়।

[To find the condition that the line $y=mx+c$ may touch the circle $x^2+y^2=a^2$.]

বৃত্তের সমীকরণে y-এর পরিবর্তে $mx+c$ বসাইয়া পাই,

$$x^2+(mx+c)^2=a^2,$$

বা, $(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0.$

যদি প্রদত্ত সরলরেখা প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে সরলরেখাটি বৃত্তকে দুইটি মিলিত (coincident) বিন্দুতে ছেদ করিবে এবং তখন উপরের সমীকরণের বীজদ্বয় অবশ্যই সমান হইবে।

সুতরাং, $4m^2c^2=4(1+m^2)(c^2-a^2)$,

বা, $m^2c^2=c^2-a^2+m^2c^2-m^2a^2$,

বা, $c^2=a^2(1+m^2)$,

বা, $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$.

সুতরাং, প্রদত্ত সরলরেখার প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হইবার সর্ত হইল,

$$\mathbf{c=\pm a\sqrt{1+m^2}}.$$

দ্রষ্টব্য। m-এর যে কোন মানের জন্য $\mathbf{y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}}$ সমান্তরাল রেখাদ্বয় $\mathbf{x^2+y^2=a^2}$ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

6·26a. **$\mathbf{y=mx+c}$ রেখা $\mathbf{x^2+y^2=a^2}$ বৃত্তের স্পর্শক হইলে স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।**

[To find the co-ordinates of the point of contact when $y=mx+c$ touches the circle $x^2+y^2=a^2$.]

মনে কর, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1).

এখন, (x_1, y_1) বিন্দুতে প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1+yy_1=a^2$,

$$\text{বা,}\quad y=-\frac{x_1}{y_1}x+\frac{a^2}{y_1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

এখন, $y=mx+c$ এবং (1) উভয়েই প্রদত্ত বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক বলিয়া $y=mx+c$ এবং সমীকরণ (1), অভিন্ন সমীকরন হইবে।

$$\therefore\quad m=-\frac{x_1}{y_1}, \qquad \text{এবং } c=\frac{a^2}{y_1}.$$

$$\therefore\quad y_1=\frac{a^2}{c} \qquad \text{এবং } x_1=-my_1=-\frac{ma^2}{c}$$

অতএব, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $\left(-\frac{ma^2}{c}, \frac{a^2}{c}\right)$.

কিন্তু $c=a\sqrt{1+m^2}$.

$$\therefore\quad \text{নর্ণেয় স্থানাঙ্ক } \left(-\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right).$$

6·27. **নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু হইতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের সংখ্যা।**

[Number of tangents that can be drawn from a given external point to a circle.]

মনে কর, নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) এবং বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2+y^2=a^2.$$

$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ সর্বদাই ইহার স্পর্শক।

ইহা (x_1, y_1) বিন্দুগামী হইলে,

$$y_1 = mx_1 \pm a\sqrt{1+m^2},$$

বা, $(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1+m^2)$,

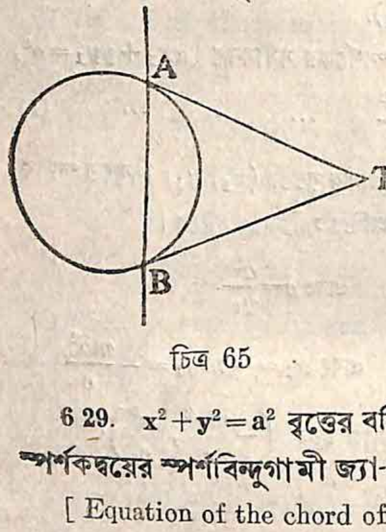
বা, $(x_1{}^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + (y_1{}^2 - a^2) = 0 \cdots (1)$

ইহা m দ্বারা প্রকাশিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

সুতরাং, ইহাকে সমাধান করিয়া m-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দু হইতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যাইবে।

6 28. স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা (Chord of Contact)



চিত্র 65

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের যে দুইটি স্পর্শক টানা যায়, তাহাদের স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে **স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা** (Chord of Contact) বলে।

6 29. $\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$ বৃত্তের বহিঃস্থ $(\mathbf{x_1, y_1})$ বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ।

[Equation of the chord of contact of tangents drawn to the circle $x^2 + y^2 = a^2$ from the external point (x_1, y_1)]

মনে কর (x_1, y_1) বিন্দু হইতে অঙ্কিত $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3).

এখন, (x_2, y_2) বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $xx_2 + yy_2 = a^2$;

ইহা (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলিয়া $x_1x_2 + y_1y_2 = a^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

আবার (x_3, y_3) বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ, $xx_3 + yy_3 = a^2$.

ইহা (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলিয়া, $x_1x_3 + y_1y_3 = a^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

(1) ও (2) হইতে বুঝা যাইতেছে যে, (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুদ্বয়ের প্রত্যেকটিই $xx_1 + yy_1 = a^2$ সরলরেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore$ $\mathbf{xx_1+yy_1=a^2}$ ই নির্ণেয় স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা।

6·30. $\mathbf{y=mx+c}$ সরলরেখার $\mathbf{y^2=4ax}$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবার সর্ত নির্ণয়।

[To find the condition that the line $y=mx+c$ may be a tangent to the parabola $y^2=4ax$.]

$y=mx+c$ হইতে y-এর মান অধিবৃত্তের সমীকরণ, $y^2=4ax$-এ বসাইয়া পাই,

$$(mx+c)^2=4ax,$$

বা, $m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0$ ... ... (1)

(1) কে সমাধান করিয়া x-এর যে দুইটি মান পাওয়া যাইবে তাহা প্রদত্ত রেখা এবং প্রদত্ত অধিবৃত্তের ছেদ বিন্দুদ্বয়ের ভুজ।

এখন, এই ভুজদ্বয় অভিন্ন হইলে ছেদবিন্দুদ্বয় মিলিত (coincident) হইবে এবং রেখাটি অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে।

সুতরাং, প্রদত্ত রেখা প্রদত্ত অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে

যদি, $4(mc-2a)^2=4m^2c^2$ হয়,

অর্থাৎ যদি, $-4amc+4a^2=0$ হয়,

অর্থাৎ যদি, $c=\dfrac{a}{m}$ হয়,

$\therefore$ নির্ণেয় সর্ত, $\mathbf{c=\dfrac{a}{m}}$

দ্রষ্টব্য। $y=mx+\dfrac{a}{m}$ রেখাটি m-এর সকল বাস্তব মানের জন্যই $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

6·31 $\mathbf{y=mx+c}$ রেখা $\mathbf{y^2=4ax}$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হইলে, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

[To find the point of contact, when $y=mx+c$ touches the parabola $y^2=4ax$.]

$y=mx+c$ রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হইলে $c=\dfrac{a}{m}$ হইবে।

$\therefore$ $y=mx+\dfrac{a}{m}$ সর্বদাই $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

এখন, অধিবৃত্তের সমীকরণে y-এর পরিবর্তে $mx+\frac{a}{m}$ বসাইয়া পাই,

$$\left(mx+\frac{a}{m}\right)^2=4ax,$$

$$\text{বা, } \left(mx+\frac{a}{m}\right)^2-4ax=0,$$

$$\text{বা, } \left(mx-\frac{a}{m}\right)^2=0,$$

$$\text{বা, } mx=\frac{a}{m}, \frac{a}{m};$$

$$\therefore \quad x=\frac{a}{m^2}, \frac{a}{m^2}.$$

x এর এই মান, $y=mx+\frac{a}{m}$ সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$y=m\times\frac{a}{m^2}+\frac{a}{m}=\frac{a}{m}+\frac{a}{m}=\frac{2a}{m}.$$

$$\therefore \quad y=\frac{2a}{m}, \frac{2a}{m}.$$

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

6·32. বহিঃস্থ যে কোন বিন্দু হইতে অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

[Two tangents can be drawn to a parabola from an external point.]

$y=mx+\frac{a}{m}$ রেখা সর্বদাই $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

যদি এই স্পর্শক অধিবৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) দিয়া যায়, তবে

$$y_1=mx_1+\frac{a}{m},$$

$$\text{বা, } m^2x_1-my_1+a=0.$$

ইহা m-এর দ্বিঘাত সমীকরণ ; সুতরাং m-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দু হইতে অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যাইবে।

6·33. যে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে, অধিবৃত্তের এইরূপ তিনটি অভিলম্ব অঙ্কন করা যায়।

[Through any point three normals can be drawn to a parabola.]

আমরা জানি, $y=mx-2am-am^3$ রেখাটি সর্বদাই $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব।

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দুটি (x_1, y_1) ; এখন m এর মান এইরূপ হইবে যেন অভিলম্বটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হয়।

$$\therefore \quad y_1=mx_1-2am-am^3,$$

$$\text{বা,} \quad am^3+m(2a-x_1)+y_1=0.$$

ইহা m-এর একটি ত্রিঘাত সমীকরণ ; অতএব ইহার তিনটি বীজ থাকিবে। m এর প্রত্যেকটি মানের জন্য (x_1, y_1) বিন্দুগামী একটি অভিলম্ব পাওয়া যাইবে।

সুতরাং, যে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অধিবৃত্তের তিনটি অভিলম্ব অঙ্কন করা যায়।

দ্রষ্টব্য। m এর মান তিনটি m_1, m_2 এবং m_3 হইলে অভিলম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি যথাক্রমে $(am_1^2, -2am_1)$, $(am_2^2, -2am_2)$ এবং $(am_3^2, -2am_3)$ হইবে।

6·34 $\mathbf{y=mx+c}$ সরলরেখার $\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ উপবৃত্তের স্পর্শক হইবার সর্ত।

[To find the condition that the line $y=mx+c$ may be a tangent to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.]

উপবৃত্তের সমীকরণে y-এর পরিবর্তে $mx+c$ বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

$$\text{বা,} \quad (a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0 \quad \cdots \quad (1)$$

ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

$\therefore$ ইহাকে সমাধান করিলে x-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে। x এর এই মানদ্বয় হইল প্রদত্ত রেখা এবং প্রদত্ত উপবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ।

এখন, এই ভুজদ্বয় অর্থাৎ (1) এর বীজদ্বয় সমান হইলে, ছেদবিন্দুদ্বয় পরস্পর মিলিত হইবে, অর্থাৎ রেখাটি উপবৃত্তের স্পর্শক হইবে।

আবার, এই বীজদ্বয় সমান হইবার সর্ত হইল,

$$4a^4m^2c^2-4(a^2m^2+b^2).a^2(c^2-b^2)=0,$$

বা, $a^2m^2c^2-(a^2m^2+b^2)(c^2-b^2)=0,$

বা, $a^2m^2b^2+b^4-b^2c^2=0,$

বা, $c^2=a^2m^2+b^2,$

বা, $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$

$\therefore$ নির্ণেয় সর্ত হইল, $\mathbf{c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

দ্রষ্টব্য। $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ রেখাটি m এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হইবে।

6·35. $\mathbf{y=mx+c}$ সরলরেখা $\mathbf{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিলে স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

[To find the point of contact when $y=mx+c$ touches the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.]

মনে কর, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1).

এখন, (x_1, y_1) বিন্দুতে প্রদত্ত উপবৃত্তের স্পর্শক হইবে

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণকে সাজাইয়া লিখিলে পাওয়া যায়

$$mx-y+c=0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

(1) এবং (2) সরলরেখাদ্বয় প্রদত্ত উপবৃত্তকে একই বিন্দু (x_1, y_1) এ স্পর্শ করে বলিয়া উহারা একই হইবে।

$$\therefore \quad \frac{x_1}{a^2m}=\frac{y_1}{-b^2}=-\frac{1}{c}.$$

$$\therefore \quad x_1=-\frac{a^2m}{c} \text{ এবং } y_1=\frac{b^2}{c}.$$

কিন্তু আমরা জানি প্রদত্ত রেখা প্রদত্ত উপবৃত্তকে স্পর্শ করিলে

$c = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\pm\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$

6·36. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উপবৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

[Two tangents can be drawn to an ellipse from an external point.]

মনে কর, (x_1, y_1) উপবৃত্তের বহিঃস্থ যে কোন বিন্দু।

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$ সরলরেখাটি সর্বদাই $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক।

যদি উহা (x_1, y_1) বিন্দুগামী হয় তবে

$$y_1 = mx_1 \pm \sqrt{a^2m^2+b^2},$$

বা, $$(y_1 - mx_1)^2 = a^2m^2 + b^2.$$

ইহা m এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; সুতরাং, ইহা হইতে m-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে।

m এর প্রত্যেক মানের জন্য (x_1, y_1) বিন্দুগামী প্রদত্ত উপবৃত্তের একটি স্পর্শক পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উপবৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

6·37. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের নাভিদ্বয় হইতে উহার যে কোন স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য p ও p' হইলে $pp' = b^2$.

[If p and p' be the lengths of perpendiculars from the foci upon a tangent to the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, then $pp' = b^2$.]

$y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$ বা, $mx - y + \sqrt{a^2m^2+b^2} = 0$ সর্বদাই প্রদত্ত উপবৃত্তের স্পর্শক।

উপবৃত্তের নাভিলম্বের স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$ এবং $(ae, 0)$,
এখন, $(ae, 0)$ হইতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$= p = \frac{mae + \sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$$

আবার, $(-ae, 0)$ হইতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=p'=\frac{-mae+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\therefore\quad pp'=\frac{a^2m^2+b^2-a^2m^2e^2}{m^2+1}=\frac{m^2a^2(1-e^2)+b^2}{m^2+1}$$

$$=\frac{b^2(m^2+1)}{m^2+1}=b^2. \qquad [\because b^2=a^2(1-e^2)]$$

6·38. পরাবৃত্ত সম্পর্কিত কয়েকটি সিদ্ধান্ত।

[Some results relating to hyperbola.]

পরাবৃত্তের সমীকরণ উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে কেবলমাত্র b^2 এর চিহ্নে পৃথক।

সুতরাং, উপবৃত্ত সম্পর্কিত সিদ্ধান্ত হইতে b^2 এর পরিবর্তে $-b^2$ বসাইয়া পরাবৃত্ত সম্পর্কে আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলি পাই—

(i) $y=mx+c$ সরলরেখাটির $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করিবার সর্ত হইল,

$$\mathbf{c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}}.$$

(ii) $\mathbf{y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}}$ সরলরেখাটি সর্বদা ই $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক।

লম্ব স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ

6·39. $\mathbf{x^2+y^2=a^2}$ বৃত্তের পরস্পরের উপর লম্ব স্পর্শকগুলির ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয়।

[To find the locus of the point of intersection of perpendicular tangents to the circle $x^2+y^2=a^2$.]

আমরা জানি, m এর সকল মানের জন্যই $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$ সরলরেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক।

যদি ইহা (x_1, y_1) বিন্দুগামী হয়, তবে

$$y_1=mx_1+a\sqrt{1+m^2},$$

বা, $(y_1-mx_1)^2=a^2(1+m^2)$,

বা, $m^2(x_1{}^2-a^2)-2mx_1y_1+(y_1{}^2-a^2)=0.$

ইহা m এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, সুতরাং, ইহা হইতে m এর দুইটি

মান পাওয়া যাইবে। m-এর এই মানদ্বয়ের প্রত্যেকটির জন্য (x_1, y_1) বিন্দুগামী একটি স্পর্শক পাওয়া যাইবে, অর্থাৎ (x_1, y_1) বিন্দুগামী মোট দুইটি স্পর্শক পাওয়া যাইবে।

মনে কর, m এর মানদ্বয় m_1 ও m_2 অর্থাৎ স্পর্শকদ্বয়ের gradient m_1 ও m_2

এখন, স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হইলে,

$$m_1m_2=-1,$$

$$\text{বা,}\quad \frac{{y_1}^2-a^2}{{x_1}^2-a^2}=-1$$

$$\text{বা,}\quad {x_1}^2+{y_1}^2=2a^2.$$

$\therefore$ (x_1, y_1) অর্থাৎ লম্ব স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ

$$\mathbf{x^2+y^2=2a^2.}$$

দ্রষ্টব্য। ইহা প্রদত্ত বৃত্তের সহিত সমকেন্দ্রীয় আর একটি বৃত্ত।

6·40. পরস্পরের উপর লম্ব অধিবৃত্তের এইরূপ দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ উহার নিয়ামক।

[The locus of the point of intersection of two perpendicular tangents to a parabola is the directrix.]

আমরা জানি, $y=mx+\dfrac{a}{m}$ সরলরেখা সর্বদাই $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। যদি এই স্পর্শক বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) দিয়া যায়, তবে $y_1=mx_1+\dfrac{a}{m}$,

$$\text{বা,}\quad x_1m^2-y_1m+a=0.$$

ইহা m-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

মনে কর, এই সমীকরণের বীজদ্বয় m_1, m_2 ;

$$\text{তাহা হইলে,}\ m_1m_2=\frac{a}{x_1}.$$

কিন্তু m_1 ও m_2, (x_1, y_1) বিন্দুগামী স্পর্শকদ্বয়ের gradient.

এখন, স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হইলে, $m_1m_2=-1$.

$$\text{বা,}\quad \frac{a}{x_1}=-1,\quad \text{বা,}\quad x_1+a=0.$$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুর অর্থাৎ লম্ব স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ $x+a=0$ বা নিয়ামক।

6·41. পরস্পরের উপর লম্ব উপবৃত্তের এইরূপ দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয়।

[To find the locus of the point of intersection of two perpendicular tangents to an ellipse.]

আমরা জানি, $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ সরলরেখা সর্বদাই $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক।

যদি এই স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দু দিয়া যায়, তবে

$$y_1=mx_1\pm\sqrt{a^2m^2+b^2},$$

বা, $$(y_1-mx_1)^2=a^2m^2+b^2,$$

বা, $$(x_1^2-a^2)m^2-2mx_1y_1+(y_1^2-b^2)=0.$$

ইহা m এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

মনে কর, ইহার বীজদ্বয় m_1, m_2.

$$\therefore\quad m_1m_2=\frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2}.$$

কিন্তু, m_1 ও m_2, (x_1, y_1) বিন্দুগামী স্পর্শকদ্বয়ের gradient.

সুতরাং, স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হইলে, $m_1m_2=-1$.

বা, $$\frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2}=-1,\quad \text{বা,}\quad x_1^2+y_1^2=a^2+b^2.$$

$\therefore$ x_1, y_1 এর অর্থাৎ লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ $\mathbf{x^2+y^2=a^2+b^2}$.

দ্রষ্টব্য। ইহা একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র উপবৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত। এই বৃত্তকে **নিয়ামক বৃত্ত** (Director circle) বলে।

6·42. পরস্পরের উপর লম্ব পরাবৃত্তের এইরূপ দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয়।

[To find the locus of the point of intersection of perpendicular tangents to a hyperbola.]

অনুচ্ছেদ 6·41 বর্ণিত পদ্ধতিতে অগ্রসর হইয়া এবং b^2 এর পরিবর্তে $-b^2$ লইয়া আমরা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ পাই,

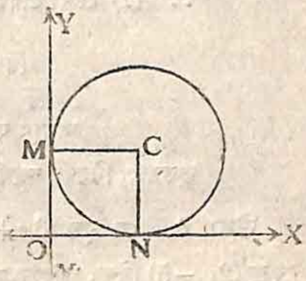
$$\mathbf{x^2+y^2=a^2-b^2}.$$

ইহা একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র পরাবৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত। এই বৃত্তকে পরাবৃত্তের **নিয়ামক বৃত্ত** (Director circle) বলে।

6·43. বিবিধ উদাহরণমালা।

উদা. 1. যে বৃত্ত মূল বিন্দু হইতে 4 একক দূরে প্রত্যেক অক্ষকে ধনাত্মক দিকে স্পর্শ করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle which touches each axis at a distance of 4 from the origin.]



চিত্র 66

মনে কর, বৃত্তটির কেন্দ্র C।

CN এবং CM যথাক্রমে x ও y অক্ষের উপর লম্ব।

প্রদত্ত সর্তানুসারে ON = MC = 4 এবং NC = OM = 4.

অর্থাৎ C-এর স্থানাঙ্ক (4, 4) এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 4.

∴ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-4)^2+(y-4)^2=4^2.$$

বা, $$x^2+y^2-8x-8y+16=0.$$

উদা. 2. $x^2+y^2=9$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলি $3x+4y=0$ সরলরেখার সমান্তরাল, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations to the tangents to the circle $x^2+y^2=9$ which are parallel to the line $3x+4y=0$.]

প্রদত্ত সরলরেখার সহিত সমান্তরাল এমন যে কোন সরলরেখা হইল,

$$3x+4y+k=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র = (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ = 3.

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হইবে, যদি বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) হইতে উহার লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হয়;

অর্থাৎ যদি $\dfrac{3.0+4.0+k}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm 3$, বা, $k=\pm 15$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকগুলি হইল, $3x+4y\pm 15=0$.

উদা. 3. $x^2+y^2=5$ বৃত্তটির যে স্পর্শকগুলি $2x+y=4$ সরলরেখার উপর লম্ব, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations to the tangents to the circle $x^2+y^2=5$ which are perpendicular to the line $2x+y=4$.]

প্রদত্ত সরলরেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত যে কোন সরলরেখার সমীকরণ
$x-2y+k=0$ ... ... (1)

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{5}$.

$\therefore$ (1) রেখা প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হইবে

যদি $\dfrac{0-2\times 0+k}{\sqrt{1^2+2^2}}=\pm\sqrt{5}$ হয়,

অর্থাৎ যদি, $k=\pm 5$ হয়।

সুতরাং, নির্ণেয় স্পর্শকগুলির সমীকরণ, $x-2y\pm 5=0$.

উদা. 4. যে বৃত্ত $3x+4y=11$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে এবং যাহার কেন্দ্র $(2, -5)$ বিন্দু, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle whose centre is $(2, -5)$ and which touches the line $3x+4y=11$.]

মনে কর, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ......(1)

ইহার কেন্দ্র $\equiv(-g, -f)$.

$\therefore$ $-g=2$ এবং $-f=-5$,

$\therefore$ $g=-2$ এবং $f=5$.

এখন, (1) সমীকরণটি হইল, $x^2+y^2-4x+10y+c=0$ ... ... (2)

প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ হইতে পাই,

$$\therefore\ x=\frac{11-4y}{3}.$$

x-এর এই মান (2) এ বসাইয়া পাই,

$$\left(\frac{11-4y}{3}\right)^2+y^2-4\cdot\frac{11-4y}{3}+10y+c=0,$$

বা, $25y^2+50y+9c-11=0$ ... ... (3)

যেহেতু, প্রদত্ত রেখা (2) এর স্পর্শক, সুতরাং উহা (2) কে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করিবে।

$\therefore$ (3) এর বীজদ্বয় সমান হইবে।

$\therefore$ (3) এর নিরূপক $=0$,

বা, $(50)^2-4{\cdot}25(9c-11)=0$,

বা, $9c-11=\dfrac{(50)^2}{4.25}=25$, বা, $c=4$.

c-এর মান (2) এ বসাইয়া নির্ণেয় সমীকরণ পাওয়া গেল,

$$x^2+y^2-4x+10y+4=0.$$

উদা. 5 $x^2+y^2=25$ বৃত্তের সেই স্পর্শকগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর যাহারা x-অক্ষের সহিত $30°$ কোণে নত।

[Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=25$ which are inclined at an angle of $30°$ to the axis of x.]

আমরা জানি, $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$ রেখাদ্বয় সর্বদাই $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক।

এখানে, $m=\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, এবং $a=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ,

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x\pm 5\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2},$$

বা, $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x\pm\dfrac{10}{\sqrt{3}}$, বা, $x-\sqrt{3}y\pm 10=0$.

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ এবং $x^2+y^2-10x-6y+14=0$ বৃত্তদ্বয় $(3, -1)$ বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করে।

[Prove that the two circles $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ and $x^2+y^2-10x-6y+14=0$ touch each other at the point $(3, -1)$.]

$x=3$ এবং $y=-1$ বসাইলে উভয় সমীকরণের বামপক্ষই শূন্য হয়; অর্থাৎ $(3, -1)$ বিন্দুটি উভয় বৃত্তের উপর অবস্থিত।

এখন, (3, −1) বিন্দুতে প্রথম বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ,

$$3x-y-2(x+3)+3(y-1)+8=0$$

বা, $x+2y=1$ ... ... (1)

আবার, (3, −1) বিন্দুতে দ্বিতীয় বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$3x-y-5(x+3)-3(y-1)+14=0,$$

বা, $x+2y=1$ ... ... (2)

এখন, (1) এবং (2) একই সমীকরণ ; অর্থাৎ, $x+2y=1$ উভয় বৃত্তকেই (3, −1) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

∴ বৃত্তদ্বয় (3, −1) বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করে।

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2+2ax+c^2=0$ এবং $x^2+y^2+2by+c^2=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করিবে যদি $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$ হয়।

[Prove that the two circles $x^2+y^2+2ax+c^2=0$ and $x^2+y^2+2by+c^2=0$ touch each other if $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$.]

প্রথম বৃত্ত হইল, $x^2+y^2+2ax+c^2=0;$

বা, $(x+a)^2+(y-0)^2=a^2-c^2.$

বা, $(x+a)^2+(y-0)^2=(\sqrt{a^2-c^2})^2,$

∴ ইহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{a^2-c^2}.$

দ্বিতীয় বৃত্ত হইল, $x^2+y^2+2by+c^2=0,$

বা, $(x-0)^2+(y+b)^2=b^2-c^2,$

বা, $(x-0)^2+(y+b)^2=(\sqrt{b^2-c^2})^2.$

∴ ইহার কেন্দ্র $(0, -b)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{b^2-c^2}.$

∴ প্রদত্ত বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $=\sqrt{(-a-0)^2+(0+b)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2}.$

∴ প্রদত্ত বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমষ্টি $=\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}.$

বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করিবে যদি উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি বা অন্তরের সমান হয়,

অর্থাৎ যদি $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2-c^2}\pm\sqrt{b^2-c^2}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $a^2+b^2=a^2-c^2+b^2-c^2\pm2\sqrt{a^2-c^2)(b^2-c^2)}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $c^2=\pm\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$ হয়

অর্থাৎ যদি $c^4=a^2b^2-b^2c^2-a^2c^2+c^4$ হয়,

অর্থাৎ যদি $c^2(a^2+b^2)=a^2b^2$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{c^2}$ হয়।

উদা. 8. $(2,-3)$ বিন্দু হইতে $3x^2+3y^2-10x-6y+4=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা'য়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the chord of contact of tangents drawn to the circle $3x^2+3y^2-10x-6y+4=0$ from the point $(2,-3)$.]

প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ হইল, $3x^2+3y^2-10x-6y+4=0$.

নির্ণেয় স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ,

$3x.2+3y-3-5\ (x+2)-3(y-3)+4=0,$

বা, $x-12y+3=0.$

উদা 9 যদি $y=x\sin\alpha+a\sec\alpha$ সরলরেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে দেখাও যে, $\cos^2\alpha=1$.

If $y=x\sin\alpha+a\sec\alpha$ is a tangent to the circle $x^2+y^2=a^2$, then prove that $\cos^2\alpha=1$.]

প্রদত্ত রেখা এবং বৃত্তের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে। সরলরেখার সমীকরণ হইতে y এর মান বৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$x^2+(x\sin\alpha+a\sec\alpha)^2=a^2,$$

বা, $x^2(1+\sin^2\alpha)+2ax\tan\alpha+a^2\tan^2\alpha=0$ ... ... (1)

সরলরেখাটি যদি বৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে(1) এর বীজদ্বয় সমান হইবে।

$\therefore\ a^2\tan^2\alpha=a^2(1+\sin^2\alpha)\tan^2\alpha,$

বা, $\sin^2\alpha\tan^2\alpha=0$, বা, $\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}=0,$

বা, $\sin^4\alpha=0$, বা, $(1-\cos^2\alpha)^2=0$, $\therefore\ \cos^2\alpha=1.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি

আমরা জানি, $y=mx+c$ সরলরেখা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $c^2=a^2(1+m^2)$ হয়।

এখানে, $m=\sin\alpha$, $c=a\sec\alpha$.

$\therefore$ প্রদত্ত রেখা প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হইলে,

$a^2\sec^2\alpha=a^2(1+\sin^2\alpha)$, বা, $\sec^2\alpha=1+\sin^2\alpha$

বা, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\sin^2\alpha$, বা, $1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

বা, $\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, $\therefore \cos^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1$

উদা 10. a এর মান কত হইলে $y=x+3$ সরলরেখাটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে ?

[For what value of a will the straight line $y=x+3$ touch the parabola $y^2=4ax$?]

$y=mx+c$ সরলরেখার $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবার সর্ত হইল, $c=\dfrac{a}{m}$.

এখানে, $c=3$ এবং $m=1$.

$\therefore 3=\dfrac{a}{1}$, বা, $a=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় a এর মান 3.

উদা. 11. $y^2=12x$ অধিবৃত্তের কোন স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $45°$ কোণে নত ; ইহার সমীকরণ এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A tangent to the parabola $y^2=12x$ makes an angle $45°$ to the positive direction of the x-axis. Find its equation and the co-ordinates of its point of contact.]

আমরা জানি, m এর যে কোন মানের জন্যই $y=mx+\dfrac{a}{m}$ রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$.

এখানে, $m=\tan 45^\circ=1$, এবং $a=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y=1.\ x+\frac{3}{1}$, বা, $y=x+3$.

নির্ণেয় স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{1}, \frac{2.3}{1}\right)$ বা, $(3, 6)$.

উদা. 12. $y^2=20x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শকদ্বয় $(1, 6)$ বিন্দুগামী তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the two tangents to the parabola $y^2=20x$ which pass through the point $(1, 6)$.]

প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল, $y^2=20x=4.5x$,

এখানে, $a=5$.

আমরা জানি, m এর সকল মানের জন্যই $y=mx+\frac{a}{m}$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

সুতরাং, $y=mx+\frac{5}{m}$ সর্বদাই $y^2=4\ 5x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

এখন, ইহা $(1, 6)$ বিন্দুগামী বলিয়া, $6=m+\frac{5}{m}$, বা, $m^2-6m+5=0$.

$\therefore\ m=5, 1$.

m এর মানদ্বয় $y=mx+\frac{5}{m}$ এ পর পর বসাইয়া $y=20x$ অধিবৃত্তের $(1, 6)$ বিন্দুগামী স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হইল, $y=5x+1$ এবং $y=x+5$

উদা. 13. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের সেই স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা (i) $x-2y=5$ এর সহিত সমান্তরাল, (ii) $x-2y=5$ এর উপর লম্ব।

[Find the equation to the tangent of the parabola which is (i) parallel to the line $x-2y=5$, (ii) perpendicular to the line $x-2y=5$]

প্রদত্ত অধিবৃত্ত হইল, $y^2=8x=4.2x$.

$\therefore$ এখানে $a=2$.

প্রদত্ত রেখার gradient $=\frac{1}{2}$.

(i) আমরা জানি, $y=mx+\frac{a}{m}$ সরলরেখা সর্বদাই $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

এই স্পর্শক প্রদত্ত রেখার সহিত সমান্তরাল বলিয়া, $m=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y=\frac{1}{2}x+\dfrac{2}{\frac{1}{2}}$

বা, $2y=x+8$, বা, $x-2y+8=0$.

(ii) $y=mx+\dfrac{a}{m}$ সর্বদাই $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

$\therefore$ $y=mx+\dfrac{2}{m}$ সর্বদাই $y^2=4.2x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

ইহা যদি প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব হয় তবে $m\times\frac{1}{2}=-1$,

$\therefore$ $m=-2$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y=-2x+\frac{2}{-2}$,

বা, $y=-2x-1$, বা, $2x+y+1=0$.

উদা. 14. $y^2=12x$ অধিবৃত্তের যে অভিলম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 135° কোণে নত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the normal to the parabola $y^2=12x$ which is inclined at 135° to the positive direction of the x axis.]

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ, $y=mx-2am-am^3$.

এখানে, $a=3$, এবং $m=\tan 135^\circ=-1$.

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$y=(-1).\ x-2.3.(-1)-3(-1)^3$,

বা, $y=-x+6+3$. বা, $x+y-9=0$.

উদা. 15. $y^2=2x$ অধিবৃত্তের যে অভিলম্ব $y=4x$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the normal to the parabola $y^2=2x$ which is parallel to the line $y=4x$.]

অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল, $y^2=2x=4.\frac{1}{2}x$. $\therefore$ এখানে, $a=\frac{1}{2}$.

প্রদত্ত রেখার gradient $=4$.

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ, $y=mx-2am-am^3$

$\therefore$ $y^2=2x$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ, $y=mx-2.\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}m^3$.

যেহেতু, ইহা $y=4x$ এর সহিত সমান্তরাল, $\therefore m=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ, $y=4x-2.\frac{1}{2}.4-\frac{1}{2}(4)^3$,

বা, $y=4x-4-32$, বা, $4x-y=36$.

উদা. 16. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের যে বিন্দুতে অভিলম্ব অধিবৃত্তের অক্ষের সহিত 60° কোণে নত, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the point on the parabola $y^2=8x$ at which the normal is inclined at 60° to the axis of the parabola.]

প্রদত্ত অধিবৃত্ত হইল, $y^2=8x=4.2x$. $\therefore$ $a=2$.

অভিলম্বের gradient m হইলে, উহা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে বিন্দুতে অভিলম্ব, তাহা হইবে $(am^2, -2am)$.

এখানে, $m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$. $\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $\{2(\sqrt{3})^2, -2.2\sqrt{3}\}$

অর্থাৎ, $(6, -4\sqrt{3})$.

উদা. 17. প্রমাণ কর যে, $3x+9y-19=0$ সরলরেখা $y^2=12x$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব।

[Prove that the straight line $3x+9y-19=0$ is a normal of the parabola $y^2=12x$.]

প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল, $y^2=12x=4.3x$. $\therefore$ এখানে, $a=3$.

আমরা জানি যে, $y=mx-2am-am^3$ সর্বদাই $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব।

$\therefore$ $y=mx-2.3m-3m^3$, বা, $y=mx-6m-3m^3$ সর্বদাই $y^2=12x$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব।

এখন, m এর মান প্রদত্ত সরলরেখার Gradient এর সাথে সমান ধরিলে যদি ইহা প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণের অনুরূপ হয়, তবে প্রদত্ত রেখা প্রদত্ত অধিবৃত্তের অভিলম্ব হইবে।

প্রদত্ত রেখার Gradient $=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}$.

$y=mx-6m-3m^3$ এ $m=-\frac{1}{3}$ বসাইয়া পাই,

$$y=-\tfrac{1}{3}x-6(-\tfrac{1}{3})-3(-\tfrac{1}{3})^3,$$

বা, $3x+9y-19=0$. ইহাই প্রদত্ত রেখা।

$\therefore$ প্রদত্ত রেখা প্রদত্ত অধিবৃত্তের অভিলম্ব।

উদা. 18. দেখাও যে, $x^2+y^2-5x+2y-48=0$ বৃত্তের $(5, 6)$ বিন্দুতে অভিলম্বটি $5y^2+448x=0$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

[Prove that the normal to the circle $x^2+y^2-5x+2y-48=0$ at the point $(5, 6)$ is a tangent to the parabola $5y^2+448x=0$.]

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv(\frac{5}{2}, -1)$

$\therefore$ (5, 6) বিন্দুতে প্রদত্ত বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হইল,

$$y-6=\frac{6+1}{5-\frac{5}{2}}(x-5), \quad \text{বা,} \quad y=\frac{14}{5}x-8.$$

প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণকে সাজাইয়া লেখা যায়,

$$y^2=-\frac{448}{5}x=4\left(\frac{-112}{5}\right)x. \quad \therefore \quad a=-\frac{112}{5}.$$

এখন, $y=mx+\frac{a}{m}$ সর্বদাই $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

$\therefore \quad y=mx-\frac{112}{5m}$ সর্বদাই $y^2=-\frac{448}{5}x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

এখন, $m=\frac{14}{5}$ লইলে উহা হয়, $y=\frac{14}{5}x-\frac{112}{5\times\frac{14}{5}}$,

বা, $y=\frac{14}{5}x-8.$

$\therefore \quad y=\frac{14}{5}x-8$, প্রদত্ত অধিবৃত্তের স্পর্শক।

উদা. 19. দেখাও যে, $x-3y=13$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে ; স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর।

[Show that the straight line $x-3y=13$ touches the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ and find the point of contact.]

প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ হইতে পাই, $x=3y+13$.

উপবৃত্তের সমীকরণে x এর এই মান বসাইয়া পাই, $\frac{(13+3y)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$,

বা, $\frac{169+78y+9y^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, বা, $169y^2+1248y+2304=0$,

বা, $(13y+48)^2=0$. ইহা y এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

$$\therefore \quad y=-\frac{48}{13}, -\frac{48}{13}.$$

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখা উপবৃত্তকে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে, অর্থাৎ উহা উপবৃত্তকে স্পর্শ করে।

এখন, $x=13+3\left(-\frac{48}{13}\right)=\frac{25}{13}$. $\therefore$ স্পর্শবিন্দু হইল $\left(\frac{25}{13}, -\frac{48}{13}\right)$.

উদা. 20. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের যে স্পর্শকগুলি অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছিন্ন করে, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the tangents to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ which cuts off equal intercepts on the axes.]

আমরা জানি, $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ সর্বদাই $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক।

এখন, প্রদত্ত সর্ত হইতে m এর মান নির্ণয় করিলেই নির্ণেয় স্পর্শকগুলির সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

যেহেতু, স্পর্শক অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছিন্ন করে, অতএব উহা x-অক্ষের সহিত $\pm 45°$ কোণে নত থাকিবে।

$$\therefore \quad m=\tan(\pm 45°)=\pm 1.$$

নির্ণেয় স্পর্শকগুলি হইল, $y=\pm x\pm\sqrt{a^2+b^2}$.

দ্রষ্টব্য। এখানে x এর প্রতি চিহ্নের জন্য দুইটি করিয়া মোট চারিটি স্পর্শক হইবে।

উদা. 21. $2x^2+3y^2=56$ উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে বিন্দুর কোটি ভুজের দ্বিগুণ, সেই বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations of the tangent and normal to the ellipse $2x^2+3y^2=56$ at the point whose ordinate is double the abscissa.]

যেহেতু, বিন্দুটির কোটি ভুজের দ্বিগুণ, বিন্দুটিকে $(a, 2a)$ ধরা যাইতে পারে।

যেহেতু, ইহা উপবৃত্তের উপর অবস্থিত, সুতরাং, $2a^2+3(2a)^2=56$,

বা, $14a^2=56$, বা, $a^2=4$, $\therefore$ $a=\pm 2$.

$a=\pm 2$ হইলে, $2a=\pm 4$.

অর্থাৎ কোটি ভুজের দ্বিগুণ হইবে, উপবৃত্তের উপর এইরূপ দুইটি বিন্দু $(2, 4)$ এবং $(-2, -4)$ পাওয়া গেল।

এখন, $(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $2x.2+3y.4=56$,

বা, $x+3y=14$.

$(-2, -4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $2x(-2)+3y(-4)=56$,

বা, $x+3y+14=0$

উপবৃত্তের সমীকরণকে আদর্শ আকারে রাখিয়া (অর্থাৎ উভয় পক্ষকে 56 দ্বারা ভাগ করিয়া) পাই, $\dfrac{x^2}{28}+\dfrac{y^2}{\frac{56}{3}}=1.$

এখানে, $a^2=28$ এবং $b^2=\frac{56}{3}$.

$\therefore$ (2, 4) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y-4=\frac{28\times 4}{\frac{56}{3}\times 2}(x-2). \qquad \left[\text{সূত্র ঃ}\quad y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\ (x-x_1)\right]$$

বা, $3x-y=2$.

$(-2,-4)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y+4=\frac{28\,(-4)}{\frac{56}{3}\,(-2)}(x+2), \qquad \text{বা,}\quad 3x-y+2=0.$$

উদা. 22. $4x^2+3y^2=6$ উপবৃত্তের যে স্পর্শকদ্বয় $y=2x+3$ রেখার সহিত (i) সমান্তরাল, (ii) লম্বভাবে অবস্থিত, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations to the tangents to the ellipse $4x^2+3y^2=6$ which are (i) parallel and (ii) perpendicular to the line $y=2x+3$.]

(i) $y=2x+3$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে, $y=2x+k$.]

এখন উপবৃত্তের সমীকরণে y এর পরিবর্তে $2x+k$ বসাইয়া পাই,

$$4x^2+3\,(2x+k)^2=6.$$

বা, $$16x^2+12kx+3k^2-6=0 \qquad \cdots \qquad \cdots(1)$$

যদি $y=2x+k$ প্রদত্ত উপবৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে (1) সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে।

$\therefore\ 144k^2-4.16(3k^2-6)=0$, বা, $48k^2=384$, বা, $k^2=8$,

$\therefore\ k=\pm 2\sqrt{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ, $y=2x\pm 2\sqrt{2}$.

(ii) $y=2x+3$ রেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে, $x+2y+k=0$, বা, $x=-2y-k$.

x এর এই মান উপবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$4(-2y-k)^2+3y^2=6$, বা, $19y^2+16ky+(4k^2-6)=0 \cdots (2)$

এখন, যদি $x+2y+k=0$ রেখাটি প্রদত্ত উপবৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে (2) বীজদ্বয় সমান হইবে।

$\therefore \quad (16k)^2-4.19(4k^2-6)=0,$ বা, $256k^2-304k^2+456=0,$

বা, $-48k^2+456=0,$ বা, $2k^2-19=0,$ বা, $k^2=\frac{19}{2},$

$\therefore \quad k=\pm\sqrt{\frac{19}{2}}.$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, $x+2y\pm\sqrt{\frac{19}{2}}=0.$

উদা. 23. $lx+my=n$ সরলরেখার $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (i) স্পর্শক, (ii) অভিলম্ব হওয়ার সর্ত নির্ণয় কর।

[Find the condition that the line $lx+my=n$ be a (i) tangent (ii) normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$]

(i) মনে কর, $lx+my=n,$ ... ...(1)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots(2)$$

এর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক।

(2) এর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল,

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots(3)$$

এখন (1) এবং (3) উভয়েই (2) এর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক বলিয়া একই সমীকরণ হইবে।

$$\therefore \quad \frac{l}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{m}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{n}{1}, \qquad \text{বা,} \quad \frac{a^2l}{x_1}=\frac{b^2m}{y_1}=n.$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{a}=\frac{al}{n} \cdots\cdots(4) \quad \text{এবং} \quad \frac{y_1}{b}=\frac{bm}{n} \quad \ldots \quad \ldots(5)$$

(4) এবং (5) এর বর্গের সমষ্টি লইলে পাই,

$\frac{a^2l^2}{n^2}+\frac{b^2m^2}{n^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ [$\because$ (x_1, y_1) উপবৃত্তের উপরে অবস্থিত]

বা, $a^2l^2+b^2m^2=n^2.$ ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

উদা. 26. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ পরাবৃত্তের যে স্পর্শকগুলি $\sqrt{3}x-2y=0$ রেখার সমান্তরাল, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Obtain the equation of the tangents to the hyperbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ which are parallel to the straight line $\sqrt{3}x-2y=0$.]

$\sqrt{3}x-2y=0$ রেখার সহিত সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণ
$\sqrt{3}x-2y+k=0$ ... ... (1)

ইহা হইতে পাই, $y=\frac{\sqrt{3}x+k}{2}$

y-এর এই মান পরাবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{16}-\frac{(\sqrt{3}x+k)^2}{36}=1,$$

বা, $9x^2-4(\sqrt{3}x+k)^2=144,$

বা, $3x^2+8\sqrt{3}kx+4(k^2+36)=0$ ... ... (2)

ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ; ইহাকে সমাধান করিলে (1) এবং প্রদত্ত পরাবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ পাওয়া যাইবে। এই ভুজদ্বয় অভিন্ন হইলে, (1) পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবে।

∴ (1) এর পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবার সর্ত হইল,

$(8\sqrt{3}k)^2-4.3.4(k^2+36)=0,$

বা, $192k^2-48k^2-1728=0,$

বা, $144k^2-1728=0,$

বা, $k^2=12,$

$\therefore\ k=\pm 2\sqrt{3}.$

∴ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হইল,

$$\sqrt{3}x-2y\pm 2\sqrt{3}=0.$$

প্রশ্নমালা (Exercise) 6C

I

1. যে বৃত্ত অক্ষদ্বয়কে (1, 0) ও (0, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle which touches the co-ordinate axes at (1, 0) and (0, 1).]

2. (1, 1) বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র প্রথম পাদে $x+y=3$ রেখার উপর অবস্থিত এবং যাহা x-অক্ষকে স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle which touches the x-axis, passes through the point (1, 1) and whose centre lies in the first quadrant on the line $x+y=3$.]

3. যে বৃত্ত অক্ষদ্বয়কে তাহাদের ধনাত্মক দিকে মূল বিন্দু হইতে 5 একক দূরে স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the circle which touches the positive side of the axes at a distance of 5 units from the origin.]

4. প্রমাণ কর যে, $x=7$ ও $y=8$, উভয় রেখাই $x^2+y^2-4x-6y=12$ বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুগুলি নির্ণয় কর।

[Prove that the lines $x=7$, $y=8$ both touch the circle $x^2+y^2-4x-6y=12$. Find the point of contact.]

5. দেখাও যে, $3x+4y=25$ রেখাটি $x^2+y^2=25$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

[Show that the line $3x+4y=25$ touches the circle $x^2+y^2=25$.]

6. দেখাও যে, $x+\sqrt{3}y=8$ রেখা $x^2+y^2=16$ বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

[Show that the line $x+\sqrt{3}y=8$ touches the circle $x^2+y^2=16$ and find the point of contact.]

7. দেখাও যে, $x-y+2=0$ রেখা $x^2+y^2=2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Show that the straight line $x-y+2=0$ touches the circle $x^2+y^2=2$ and find the co-ordinates of the point of contact.]

8. প্রমাণ কর যে, $y=x+a\sqrt{2}$ রেখা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে; স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

[Prove that the straight line $y=x+a\sqrt{2}$ touches the circle $x^2+y^2=a^2$. Find the point of contact.]

9. k এর মান কত হইলে $y=2x+k$ রেখা $x^2+y^2=5$ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে?

[For what value of k will the line $y=2x+k$ touch the circle $x^2+y^2=5$?]

10. $2x-2y=k$ সরলরেখা $x^2+y^2-4x-6y+11=0$ বৃত্তটিকে স্পর্শ করিলে, k-এর মান কত ? স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[What is the value of k if the line $2x-2y=k$ touches the circle $x^2+y^2-4x-6y+11=0$? Find the co-ordinates of the point of contact.]

11. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$ বৃত্তটি x ও y অক্ষকে স্পর্শ করে।

[Show that the circle $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$ touches the axes of x and y]

12. প্রমাণ কর যে, $y-3x=10$ রেখাটি $x^2+y^2=10$ বৃত্তকে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে এবং ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Show that the straight line $y-3x=10$ cuts the circle $x^2+y^2=10$ in two coincident points and determine the co-ordinates of this point.]

13. $x^2+y^2=25$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলি $4x+3y=0$ রেখার সমান্তরাল তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the tangents to the circle $x^2+y^2=25$ which are parallel to the straight line $4x+3y=0$.]

14. $x^2+y^2-6x+4y=12$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলি $4x+3y+5=0$ রেখার সমান্তরাল তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the tangents to the circle $x^2+y^2-6x+4y=12$, which are parallel to the line $4x+3y+5=0$.]

15. $(x-1)^2+(y+1)^2=16$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলি $y=3x+10$ রেখার সমান্তরাল, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the tangents to the circle $(x-1)^2+(y+1)^2=16$ which are parallel to the line $y=3x+10$.]

16. $x^2+y^2+6x-8y+5=0$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলি $2x-y=0$ রেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the tangents to the circle $x^2+y^2+6x-8y+5=0$ which are perpendicular to the line $2x-y=0$.]

17. $x^2+y^2-14x+2y-71=0$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলি $5x+12y+6=0$ এর উপর লম্ব, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations of the tangents to the circle x^2+y^2

$-14x+2y-71=0$ which are perpendicular to the line $5x+12y+6=0$.]

18. $x^2+y^2=3$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সহিত 60° কোণে নত, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=3$ which make an angle of 60° with the x-axis.]

19. $x^2+y^2=16$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সহিত 45° কোণে নত, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations to the tangents to the circle $x^2+y^2=16$ which make an angle of 45° to the x-axis.]

20. $lx+my+n=0$ সরলরেখার $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইবার সর্ত নির্ণয় কর।

[Find the condition that the line $lx+my+n=0$ may be a tangent to the circle $x^2+y^2=a^2$.]

21. $lx+my+n=0$ সরলরেখার $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের অভিলম্ব হইবার সর্ত নির্ণয় কর।

[Find the condition that the line $lx+my+n=0$ may be a normal to the circle $x^2+y^2=a^2$.]

22. $lx+my+n=0$ রেখার $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের অভিলম্ব হইবার সর্ত নির্ণয় কর।

[Find the condition that the line $lx+my+n=0$ may be a normal to the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.]

23 প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ এবং $x^2+y^2-12x+4y+36=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় কর।

[Prove that the circles $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ and $x^2+y^2-12x+4y+36=0$ touch each other. Find the point of contact.]

24. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-4x+6y-77=0$ এবং $x^2+y^2-10x+8y+1=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

[Prove that the two circles $x^2+y^2-4x+6y-77=0$ and

$x^2+y^2-10x+8y+1=0$ touch each other internally ; find the point of contact.]

25. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-14x-10y+58=0$ ও $x^2+y^2-2x+6y-26=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করে।

[Show that the two circles $x^2+y^2-14x-10y+58=0$ and $x^2+y^2-2x+6y-26=0$ touch each other externally.]

26. দেখাও যে, $x^2+y^2=25$ বৃত্তের $(3, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকটি $x^2+y^2-8x+6y=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

[Show that the tangent at the point $(3, 4)$ to the circle $x^2+y^2=25$ touches the circle $x^2+y^2-8x+6y=0$]

27. c-এর মান কত হইলে $y=mx+c$ রেখা m-এর সকল মানের জন্যই $x^2+y^2=4y$ বৃত্তের স্পর্শক হইবে ?

[For what value of c will the line $y=mx+c$ be a tangent to the circle $x^2+y^2=4y$ for all values of m ?]

28. দেখাও যে, $y=mx$ রেখাটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের স্পর্শক হইবে যদি $(g+mf)^2=c(1+m)^2$.

[Show that $y=mx$ is a tangent to the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ if $(g+mf)^2=c(1+m)^2$.]

29. দেখাও যে, $x^2+y^2+6x-11=0$ ও $x^2+y^2-4x-1=0$ বৃত্তদ্বয় $(1, 2)$ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে এবং এই ছেদবিন্দুতে বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শকদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

[Show that the circles $x^2+y^2+6x-11=0$ and $x^2+y^2-4x-1=0$ intersect at the point $(1, 2)$ and that their tangents at this point are perpendicular to each other.]

30 যে বৃত্তের কেন্দ্র $(1, -3)$ বিন্দু এবং যাহা $2x-y-4=0$ রেখাকে স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the circle which has its centre at $(1, -3)$ and touches $2x-y-4=0$.]

31 $x^2+y^2=25$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলি (13, 0) বিন্দুগামী, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the tangents to the circle $x^2+y^2=25$ which pass through the point (13, 0).]

32. প্রদত্ত বিন্দু হইতে প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(i) (5, 5) বিন্দু হইতে $x^2+y^2=9$ বৃত্তের,

(ii) (7, −1) বিন্দু হইতে $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ বৃত্তের।

[Find the length of the tangent to the circle,

(i) $x^2+y^2=9$ from the point (5, 5),

(ii) $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ from the point (7, −1).]

33. (f, g) বিন্দু হইতে $x^2+y^2=6$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $x^2+y^2+3x+3y=0$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। প্রমাণ কর যে, $f^2+g^2+4f+4g+2=0$.

[The length of the tangent from (f, g) to the circle $x^2+y^2=6$ is twice the length of the tangent to the circle $x^2+y^2+3x+3y=0$; show that $f^2+g^2+4f+4g+2=0$.]

34. যদি $lx+my=1$ সরলরেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তটিকে স্পর্শ করে, তাহা হইলে (l,m) বিন্দুটি কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[If the line $lx+my=1$ touches the circle $x^2+y^2=a^2$, then the point (l, m) lies on a circle ; find the equation to this circle]

II

35 দেখাও যে $4x-2y+3=0$ সরলরেখাটি $y^2=12x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Show that the line $4x-2y+3=0$ is a tangent to the parabola $y^2=12x$. Find the point of contact.]

36. দেখাও যে, $y=x+2a$ রেখাটি $y^2=4a(x+a)$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Show that the line $y=x+2a$ touches the parabola $y^2=4a(x+a)$ and find the point of contact.]

37. দেখাও যে $x+y=1$ রেখাটি $y=x-x^2$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে।

[Show that the line $x+y=1$ touches the parabola $y=x-x^2$.]

38. দেখাও যে, $x+my+am^2=0$ রেখাটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Show that the line $x+my+am^2=0$ touches the parabola $y^2=4ax$. Find the point of contact.]

39. দেখাও যে, $4a(y-b)=x$ সরলরেখাটি $ay^2=bx$ অধিবৃত্তটি স্পর্শক।

[Show that the line $4a(y-b)=x$ is a tangent to the parabola $ay^2=bx$.]

40. a-এর মান কত হইলে, $y=2x+3$ রেখাটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তটির স্পর্শক হইবে?

[For what value of a will the line $y=2x+3$ be a tangent to the parabola $y^2=4ax$?]

41. a-এর মান কত হইলে, $y=3x+1$ সরলরেখাটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে?

[For what value of a will the line $y=3x+1$ be a tangent to the parabola $y^2=4ax$?]

42. $y=mx+c$ সরলরেখাটি $y^2=12x$ অধিবৃত্তকে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে এবং $5y+3x+25=0$ রেখার সমান্তরাল; m এবং c-এর মান নির্ণয় কর।

[The line $y=mx+c$ intersects the parabola $y^2=12x$ in two coincident points and is parallel to the line $5y+3x+25=0$ Find m and c.]

43. দেখাও যে, $y=2x+\frac{a}{2}$ রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে।

[Show that the line $y=2x+\frac{a}{2}$ touches the parabola $y^2=4ax$.]

44. দেখাও যে, $y=3(x+a)+\frac{3}{a}$ রেখা $y^2=4a(x+a)$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে।

[Show that the line $y=3(x+a)+\frac{3}{a}$ touches the parabola $y^2=4a(x+a)$]

45. দেখাও যে, $7x+6y=13$ রেখাটি $y^2-7x-8y+14=0$ কনিককে স্পর্শ করে।

[Show that the line $7x+6y=13$ is a tangent to the curve $y^2-7x-8y+14=0$.]

46. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক $y=3x+5$ সরলরেখার সহিত $45°$ কোণে নত। উহার সমীকরণ ও স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

[A tangent to the parabola $y^2=8x$ makes an angle of $45°$ with the straight line $y=3x+5$. Find its equation and its point of contact]

47. $y^2=3x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক অধিবৃত্তের অক্ষের সহিত $60°$ কোণে নত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the tangent to the parabola $y^2=3x$ which makes an angle of $60°$ with the axis of the parabola]

48. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক (i) $3x-y+7=0$ রেখার সহিত সমান্তরাল (ii) $3x-y+7=0$ রেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the tangent to the parabola $y^2=8x$ which is (i) parallel to the line $3x-y+7=0$, (ii) perpendicular to the line $3x-y+7=0$.]

49. $y^2=x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক (i) $3x+4y=0$ এর সহিত সমান্তরাল, (ii) $9x-8y+2=0$ রেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the tangent to the parabola $y^2=x$ which is (i) parallel to the line $3x+4y=0$, (ii) perpendicular to the line $9x-8y+2=0$]

50. দেখাও যে $2x+y-12a=0$ রেখাটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের একটি অভিলম্ব।

[Show that the line $2x+y-12a=0$ is a normal to the parabola $y^2=4ax$.]

51. দেখাও যে $2x+4y=9$ রেখাটি $y^2=8x$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব।

[Show that the line $2x+4y=9$ is a normal to the parabola $y^2=8x$.]

52. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে বিন্দুতে অভিলম্ব অধিবৃত্তের অক্ষের সহিত $60°$ কোণে নত, সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Find the point on the parabola $y^2=8x$, at which the normal is inclined at $60°$ to the axis of the parabola.]

53. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $(am_1^2, 2am_1)$ বিন্দুতে অভিলম্ব উহাকে পুনরায় $(am_2^2, 2am_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $m_1^2+m_1m_2+2=0$

[The normal to the parabola $(am_1^2, 2am_1)$ meets the curve again at $(am_2^2, 2am_2)$; prove that $m_1^2+m_1m_2+2=0$.]

54. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে জ্যা-এর সমীকরণ $y-x\sqrt{2}+4a\sqrt{2}=0$, দেখাও যে তাহা অধিবৃত্তের একটি অভিলম্ব। অধিবৃত্তের যে বিন্দুতে এই জ্যা অভিলম্ব, সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Show that the chord of the parabola $y^2=4ax$, whose equation is $y-x\sqrt{2}+4a\sqrt{2}=0$ is a normal to the parabola, and find the co-ordinates of the point of the parabola at which it is the normal.]

55 দেখাও যে $lx+my+n=0$ রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে, যদি $am^2=ln$.

[Show that the line $lx+my+n=0$ touches the parabola $y^2=4ax$, if $am^2=ln$,]

56. $y=mx+c$ রেখার $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব হইবার সর্ত নির্ণয় কর।

[Find the condition for the line $y=mx+c$ to be a normal to the parabola $y^2=4ax$.]

57 $y^2=32x$ ও $x^2=108y$ অধিবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the common tangent to the two parabolas $y^2=32x$ and $x^2=108y$]

58 একটি সরলরেখা $x^2+y^2=2a^2$ ও $y^2=8ax$ উভয়কে স্পর্শ করে; উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[A straight line touches both $x^2+y^2=2a^2$ and $y^2=8ax$ Find its equation.]

III

59 দেখাও যে, $y=x+\sqrt{\frac{5}{6}}$ রেখাটি $2x^2+3y^2=1$ উপবৃত্তের একটি স্পর্শক।

[Show that the line $y=x+\sqrt{\frac{5}{6}}$ is a tangent to the ellipse $2x^2+3y^2=1$]

60. দেখাও যে, $x-y=5$ রেখাটি $9x^2+16y^2=144$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে।

[Show that the straight line $x-y=5$ touches the ellipse $9x^2+16y^2=144$.]

61. $lx+my=1$ সরলরেখার $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হইবার সর্ত নির্ণয় কর।

[Find the condition that the line $lx+my=1$ may be a tangent to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$]

75. $x^2-4y^2=4$ পরাবৃত্তের যে স্পর্শকদ্বয় $2x-y+5=0$ সরলরেখার সমান্তরাল, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations of the tangent to the hyperbola $x^2-4y^2=4$ which are parallel to the line $2x-y+5=0$.]

76. $8x^2-9y^2=72$ পরাবৃত্তের যে স্পর্শকদ্বয় $2x+3y-3=0$ সরলরেখার উপর লম্ব, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the tangents to the hyperbola $8x^2-9y^2=72$ which are perpendicular to the line $2x+3y-3=0$.]

77. m-এর মান কত হইলে $3y=mx+6$ সরলরেখা $2x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবে ?

[For what value of m will the line $3y=mx+6$ be a tangent to the hyperbola $2x^2-9y^2=36$?]

78. $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তের যে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সহিত $60°$ কোণে নত, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equations of the tangents to the hyperbola $4x^2-9y^2=36$ which make an angle of $60°$ with the x-axis.]

6·44 Parametric Equations.

অনেক সময় কনিকের সমীকরণকে একটি মাত্র চলের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। Current co-ordinates x এবং y-কে এই চলের সাহায্যে প্রকাশ করিয়া দুইটি সমীকরণ লেখা হয়। এই দুইটি সমীকরণ একত্রে কনিককে প্রকাশ করে। এই রকম সমীকরণকে বলা হয় **Parametric equation** এবং চলটিকে বলা হয় **Parameter**.

(i) বৃত্তের Parametric Equations.

মনে কর, বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$ ... ...(1)

ইহা $x=a\cos\phi$ এবং $y=a\sin\phi$ দ্বারা সর্বদাই সিদ্ধ হয়, ϕ-এর মান যাহাই হউক না কেন।

সুতরাং, (1) বৃত্তের parametric equations হইল,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{a}\cos\phi \\ \mathbf{y} &= \mathbf{a}\sin\phi \end{aligned}\right\}$$

এখানে ϕ হইল parameter.

(ii) অধিবৃত্তের Parametric equations.

আদর্শ আকারে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল,

$$y^2 = 4ax \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

ইহা t-এর সকল মানের জন্যই $x = at^2$, $y = 2at$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সুতরাং, অধিবৃত্তের parametric equations হইল,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{at^2} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{2at} \end{aligned}\right\}$$

এখানে t হইল parameter.

দ্রষ্টব্য। অধিবৃত্তের উপর $(at^2, 2at)$ বিন্দুকে অনেক সময় 't' বিন্দু বলিয়া উল্লেখ করা হয়। 't_1' বিন্দু বলিলে বুঝিতে হইবে $(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দু।

(iii) উপবৃত্তের Parametric equations.

আদর্শ আকারে উপবৃত্তের সমীকরণ হইল,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

ইহা ϕ-এর সকল মানের জন্যই $x = a \cos \phi$, $y = b \sin \phi$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সুতরাং, (1) উপবৃত্তের parametric equations হইল,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{a \cos} \,\phi \\ \mathbf{y} &= \mathbf{b \sin} \,\phi \end{aligned}\right\}$$

এখানে ϕ হইল parameter.

দ্রষ্টব্য। ϕ-কে বলা হয় উৎকেন্দ্রিক কোণ (eccentric angle).

(iv) পরাবৃত্তের Parametric equations.

আদর্শ আকারে পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

ইহা ϕ-এর সকল মানের জন্যই $x = a \sec \phi$, $y = b \tan \phi$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সুতরাং, পরাবৃত্তের parametric equations হইল,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{a \sec} \,\phi \\ \mathbf{y} &= \mathbf{b \tan} \,\phi \end{aligned}\right\}$$

এখানে ϕ হইল parameter.

6·45. $\mathbf{y^2=4ax}$ অধিবৃত্তের ‘t’ বিন্দু অর্থাৎ $(\mathbf{at^2, 2at})$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equations of the tangent and normal to the parabola $y^2=4ax$ at the point ‘t’ i-e $(at^2, 2at)$.]

স্পর্শক : $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল, $yy_1=2a(x+x_1)$.

এখন, (x_1, y_1) এর পরিবর্তে $(at^2, 2at)$ লিখিয়া পাই,

$$y.2at=2a(x+at^2),$$

বা, $$\mathbf{y=\frac{1}{t}(x+at^2).}$$

অভিলম্ব : অভিলম্ব স্পর্শকের উপর লম্ব বলিয়া উহার gradient হইবে $-t$ $\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ হইল, $y-2at=-t(x-at^2)$,

বা, $$\mathbf{y+tx=2at+at^3}$$

কনিকের সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ।

[Locus of the middle points of parallel chords.]

6·46. $\mathbf{x^2+y^2=a^2}$ বৃত্তের একদল সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয়।

[To find the locus of the middle points of a system of parallel chords of the circle $x^2+y^3=a^2$.]

মনে কর, $y=mx+c$ রেখা সমান্তরাল জ্যা-গুলির অন্যতম। তাহা হইলে সকল জ্যা-এর জন্যই m সমান কিন্তু c ভিন্ন।

$y=mx+c$ এবং $x^2+y^2=a^2$-এর ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ পাইবার জন্য বৃত্তের সমীকরণে y-এর পরিবর্তে $mx+c$ বসাইয়া পাই,

$$x^2+(mx+c)^2=a^2,$$

বা, $$(1+m^2)x^2+2mcx+c^2-a^2=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

x_1, x_2 ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ হইলে, উহারা (1) এর বীজ হইবে।

$$\therefore \quad x_1+x_2=\frac{-2mc}{1+m^2}.$$

এখন, $y=mx+c$ সরলরেখা হইতে ছিন্ন $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (h, k) হইলে,

$$h=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-mc}{1+m^2}.$$

কিন্তু (h, k), $y=mx+c$-এর উপর অবস্থিত ;

$$\therefore\ k=mh+c=-\frac{m^2c}{1+m^2}+c=\frac{c}{1+m^2}.$$

$$\therefore\ \frac{k}{h}=\frac{\dfrac{c}{1+m^2}}{\dfrac{-mc}{1+m^2}}=-\frac{1}{m},$$

বা, $k=-\frac{1}{m}h$

$\therefore$ (h, k) এর সঞ্চারপথ হইল, $\mathbf{y=-\frac{1}{m}x.}$

ইহা, মূলবিন্দুগামী এবং $y=mx+c$-এর সহিত লম্বভাবে অবস্থিত একটি রেখা।

6·47. অধিবৃত্তের জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ উহার অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

[The locus of the middle points of a system of parallel chords of a parabola is a straight line parallel to its axis.]

মনে কর, অধিবৃত্তের সমীকরণ, $y^2=4ax$ ... ... (1)

ইহার একদল সমান্তরাল জ্যা-গুলির অন্যতম $y=mx+c$ হইলে, সকল জ্যা এর gradient-ই m হইবে ; কিন্তু c ভিন্ন ভিন্ন মানের হইবে।

$y=mx+c$ হইতে পাই, $x=\frac{y-c}{m}$.

x-এর এই মান অধিবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$y^2=\frac{4a(y-c)}{m}$, বা, $my^2-4ay+4ac=0$ ... ... (2)

জ্যা এবং অধিবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি y_1, y_2 হইলে উহারা (2) সমীকরণের বীজ হইবে।

$$\therefore\ y_1+y_2=\frac{4a}{m},\ \text{বা,}\ \frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2a}{m}.$$

মনে কর, ঐ জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k)

$$\therefore\ k=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2a}{m}.$$

$\therefore$ (h, k) বা জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল,

$$y=\frac{2a}{m}.$$

কিন্তু $y=\frac{2a}{m}$, অধিবৃত্তের অক্ষ $y=0$ এর সহিত সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

$\therefore$ সমান্তরাল জ্যা গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ অক্ষের সহিত সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

6·48. উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা।

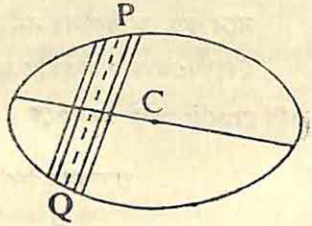
[The locus of a system of parallel chords of an ellipse is a straight line passing through the centre.]

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ... (1)

সমান্তরাল জ্যা-গুলির অন্যতম PQ এর সমীকরণ, মনে কর,

$$y=mx+c. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

সমান্তরাল সরলরেখাগুলির প্রত্যেকের gradient $=m$; তবে c ভিন্ন ভিন্ন মানের হইবে।



চিত্র 67

মনে কর, PQ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k); (h, k) অবশ্যই $y=mx+c$ কে সিদ্ধ করিবে।

$\therefore$ $k=mh+c$,

বা, $c=k-mh$ ... ... (3)

এখন (2) হইতে y-এর মান (1) এ বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

বা, $b^2x^2+a^2(mx+c)^2=a^2b^2$,

বা, $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0$ ... ... (4)

মনে কর, ছেদবিন্দুদ্বয় P ও Q এর ভুজদ্বয় যথাক্রমে x_1 ও x_2.

$\therefore$ x_1 ও x_2 (4) সমীকরণের বীজ হইবে।

$$\therefore\ x_1+x_2=-\frac{2a^2mc}{a^2m^2+b^2},$$

$$\therefore\ h=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2mc}{a^2m^2+b^2}$$

$$=-\frac{a^2m}{a^2m^2+b^2}(k-mh)\ [\ c \text{ এর মান বসাইয়া }]$$

$$\therefore\ k=-\frac{b^2}{a^2m}h.$$

সুতরাং, নির্ণেয় মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল, $\mathbf{y}=-\dfrac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2\mathbf{m}}\mathbf{x}$ ... ... (5)

এখন, (5) হইল (0, 0) গামী অর্থাৎ উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা।

$\therefore$ সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা।

6.49. পরাবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ উহার কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা।

[The locus of the middle points of a system of parallel chords of a hyperbola is a straight line passing through the centre.]

মনে কর, পরাবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

যেহেতু, ইহা উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ এ b^2 এর পরিবর্তে $-b^2$ লিখিলেই পাওয়া যায়, সুতরাং, উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণে b^2 এর পরিবর্তে $-b^2$ লিখিয়া নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{y}=\dfrac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2\mathbf{m}}\mathbf{x}.$

ইহা পরাবৃত্তের কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা।

6.50. ব্যাস ও প্রতিযোগী বা অনুবন্ধী ব্যাস (Diameters and Conjugate diameters)

সংজ্ঞা : (1) কনিকের একদল সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ যে সরলরেখা, উহাকে কনিকের একটি **ব্যাস** (diameter) বলে।

(2) কনিকের দুইটি ব্যাস যদি এমনভাবে অবস্থান করে যে, একটি অপরটির সমান্তরাল জ্যা-গুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে ঐ দুইটি ব্যাসকে কনিকের **প্রতিযোগী বা অনুবন্ধী ব্যাস** (Conjugate diameters) বলে।

মনে কর, $y=mx$ এবং $y=m'x$ রেখাদ্বয় $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের অনুবন্ধী ব্যাস।

এখন $y=mx$ এর সহিত সমান্তরাল জ্যা-গুলির সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসের সমীকরণ হইল,

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

কিন্তু, $y=m'x$, $y=mx$-এর সমান্তরাল জ্যা-গুলির সমদ্বিখণ্ডক ব্যাস।

$\therefore$ $y=m'x$ এবং (1) একই সমীকরণ।

$$\therefore \quad m'=-\frac{b^2}{a^2m}.$$

$$\therefore \quad mm'=-\frac{b^2}{a^2} \cdots\cdots\cdots (2)$$

(2) হইল $y=mx$ এবং $y=m'x$ রেখাদ্বয়ের $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের প্রতিযোগী ব্যাস হইবার সর্ত।

কনিকটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্ত হইলে এই সর্ত হইবে,

$$mm'=\frac{b^2}{a^2}.$$

মধ্যবিন্দু প্রদত্ত হইলে জ্যা এর সমীকরণ

[Equation of chords in terms of the co-ordinates of the middle point]

6·51. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু (h, k), উহার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the chord of the circle $x^2+y^2=a^2$ whose middle point is (h, k).]

প্রদত্ত বৃত্ত হইল, $x^2+y^2=a^2 \cdots\cdots\cdots (1)$

মনে কর, $y=mx+c$ নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ। (1) এ y-এর পরিবর্তে $mx+c$ বসাইয়া পাই, $x^2+(mx+c)^2=a^2$,

বা, $x^2(1+m^2)+2mcx+(c^2-a^2)=0\cdots\cdots\cdots(2)$

$y=mx+c$ এবং (1) বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ x_1, x_2 হইলে, উহারা (2) এর বীজ হইবে।

$$\therefore\ x_1+x_2=-\frac{2mc}{1+m^2}.$$

$$\therefore\ h=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-mc}{1+m^2}.$$

যেহেতু, (h, k), $y=mx+c$ এর উপর অবস্থিত,

$$\therefore\ k=mh+c=m\left(\frac{-mc}{1+m^2}\right)+c$$

$$=\frac{-m^2c+c+m^2c}{1+m^2}=\frac{c}{1+m^2}$$

$$\therefore\ \frac{k}{h}=\frac{\dfrac{c}{1+m^2}}{\dfrac{-mc}{1+m^2}}=-\frac{1}{m},$$

$\therefore\ m=-\dfrac{h}{k}$, অর্থাৎ নির্ণেয় জ্যা এর gradient $=-\dfrac{h}{k}$.

এখন, জ্যা (h, k) বিন্দুগামী,

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ, $y-k=m(x-h)$,

$$\text{বা,}\quad \mathbf{y-k=-\frac{h}{k}(x-h)}\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3) কে $xh+yk-1=h^2+k^2-1$ আকারেও লেখা হয়।

6·52. $\mathbf{y^2=4ax}$ অধিবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু $\mathbf{(h, k)}$, উহার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the chord of the parabola $y^2=4ax$ whose middle point is (h, k).]

মনে কর, নির্ণেয় জ্যা, $y=mx+c\cdots\cdots\cdots(1)$

ইহা হইতে পাই, $x=\dfrac{y-c}{m}$.

x এর এই মান অধিবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$y^2=4a.\frac{y-c}{m},$$

$$\text{বা,}\quad my^2-4ay+4ac=0.\cdots\cdots\cdots(2)$$

যদি (1) রেখা এবং অধিবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি y_1, y_2 হয়, তবে উহারা (2) এর বীজ হইবে।

$$\therefore \quad y_1+y_2=\frac{4a}{m},$$

$$\therefore \quad k=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2a}{m},$$

$$\therefore \quad m=\frac{2a}{k}\ldots\ldots\ldots(3)$$

অর্থাৎ, নির্ণেয় জ্যা এর gradient $=\dfrac{2a}{k}$.

এখন, যেহেতু জ্যা, (h, k) বিন্দুগামী,

∴ নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ হইল,

$$y-k=m(x-h),$$

বা, $$\mathbf{y-k=\frac{2a}{k}(x-h)}$$

ইহাকে $yk-k^2=2a(x-h)$,

বা, $yk-2a(x+h)=k^2-4ah$, আকারেও লেখা হয়।

6·53. $\dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}+\dfrac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=1$ **উপবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(\mathbf{h}, \mathbf{k})$ উহার সমীকরণ নির্ণয়।**

[To find the equation of the chord of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ whose middle point is } (h, k).]$$

মনে কর, $y=mx+c$ নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ।

প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণে y-এর পরিবর্তে $mx+c$ বসাইয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

বা, $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0\ldots\ldots(1)$

যদি $y=mx+c$ এবং উপবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ x_1, x_2 হয়, তবে উহারা (1) সমীকরণের বীজ হইবে।

$$\therefore \quad x_1+x_2=-\frac{2a^2mc}{a^2m^2+b^2}$$

$$\therefore \quad h=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2mc}{a^2m^2+b^2}$$

যেহেতু, (h, k) বিন্দু $y=mx+c$ রেখার উপর অবস্থিত,

সুতরাং, $k= mh+c$

$$= m\left(-\frac{a^2mc}{a^2m^2+b^2}\right)+c=\frac{b^2c}{a^2m^2+b^2}$$

$$\therefore \quad \frac{k}{h}=\frac{-\dfrac{a^2mc}{a^2m^2+b^2}}{\dfrac{b^2c}{a^2m^2+b^2}}=-\frac{b^2}{a^2m}$$

$$\therefore \quad m=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{h}{k}$$

অর্থাৎ, নির্ণেয় জ্যা এর gradient $=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{h}{k}$.

আবার, ইহা (h, k) বিন্দুগামী।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল,

$$y-\mathbf{k}=-\frac{\mathbf{h}^2.\mathbf{h}}{\mathbf{a}^2\,\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}-\mathbf{h}\right)$$

ইহাকে $\dfrac{xh}{a^2}+\dfrac{yk}{b^2}-1=\dfrac{h^2}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}-1$ আকারেও লেখা হয়।

দ্রষ্টব্য : যদি কনিকের সমীকরণকে $S=0$ বলিয়া মনে করা হয়, এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে এই কনিকের স্পর্শকের সমীকরণকে $T=0$ বলিয়া মনে করা হয়, তবে যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) তাহার সমীকরণকে $T=S_1$ আকারে লেখা যায়। এখানে S_1 হইল, S-এ (x, y) এর পরিবর্তে (x_1, y_1) লিখিলে যে রাশিমালা পাওয়া যায় তাহা।

প্রশ্নমালা (Exercise) 6D

1. (i) $x^2+y^2=16$ বৃত্তের $x+3y=5$-এর সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

(ii) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ বৃত্তের $4x-3y=7$ রেখার সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[(i) Find the locus of the middle points of a system of

chords of the circle $x^2+y^2=16$ parallel to the line $x+3y=5$.

(ii) Find the locus of the middle points of a system of chords of the circle $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ parallel to the line $4x-3y=7$]

2. (i) $y^2=16x$ অধিবৃত্তের $2x-y+3=0$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

(ii) $x^2=8y$ অধিবৃত্তের $x-y+2=0$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[(i) Find the locus of the middle points of a system of chords of the parabola $y^2=16x$ parallel to the line $2x-y+3=0$.

(ii) Find the locus of the middle points of a system of chords of the parabola $x^2=8y$ parallel to the line $x-y+2=0$.]

3. (i) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্তের $x+y=0$ রেখার সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

(ii) $16x^2+25y^2=400$ উপবৃত্তের $2x+y+3=0$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[(i) Find the locus of the middle points of a system of chords of the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ parallel to the line $x+y=0$.

(ii) Find the locus of the middle points of a system of chords of the ellipse $16x^2+25y^2=400$ parallel to the line $2x+y+3=0$.]

4. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ পরাবৃত্তের $4x-y+7=0$ রেখার সমান্তরাল জ্যা-গুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[Find the locus of the middle points of a system of chords of the hyperbola $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ parallel to the line $4x-y+7=0$.]

5. $x^2+y^2=9$ বৃত্তের যে জ্যা-র মধ্যবিন্দু $(1, 1)$ তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the chord of the circle $x^2+y^2=9$ bisected at the point $(1, 1)$.]

6. $y^2=12x$ অধিবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(2, 1)$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation of the chord of the parabola $y^2=12x$ bisected at the point $(2, 1)$.]

7. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের যে জ্যা-এর সমীকরণ $4x-3y+1=0$, দেখাও যে তাহা $(2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত।

[Show that the chord $4x-3y+1=0$ of the parabola $y^2=8x$ is bisected at the point $(2, 3)$.]

8. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ উপবৃত্তের যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $(-2, -1)$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the chord of the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ bisected at the point $(-2, -1)$.]

9. $9x^2-4y^2=36$ পরাবৃত্তের যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $(3, 1)$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Find the equation to the chord of the hyperbola $9x^2-4y^2=36$ bisected at the point $(3, 1)$.]

10 দেখাও যে, $y+3x=0$ ও $4y-x=0$ সরলরেখাদ্বয় $3x^2+4y^2=5$ উপবৃত্তের একজোড়া অনুবন্ধী ব্যাস।

[Show that the lines $y+3x=0$ and $4y-x=0$ are a pair of conjugate diameters of the ellipse $3x^2+4y^2=5$.]

11. দেখাও যে, $3y=5x$ ও $15y=4x$ সরলরেখাদ্বয় $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তের এক জোড়া অনুবন্ধী ব্যাস।

[Show that the lines $3y=5x$ and $15y=4x$ are a pair of conjugate diameters of the hyperbola $4x^2-9y^2=36$.]

12. $16x^2-9y^2=144$ পরাবৃত্তের যে ব্যাস $x=2y$-এর অনুবন্ধী, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[For the hyperbola $16x^2-9y^2=144$, find the equation to the diameter which is conjugate to the diameter $x=2y$.]

সপ্তম অধ্যায়

কনিকের জ্যামিতিক ধর্ম

(Geometrical Properties of conics)

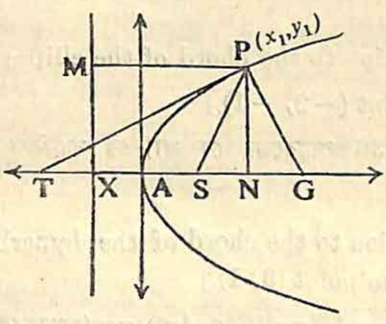
7·1. অধিবৃত্তের কয়েকটি জ্যামিতিক ধর্ম।

[Some geometrical properties of the parabola.]

সংজ্ঞা : অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুতে অঙ্কিত ঐ অধিবৃত্তের স্পর্শক এবং কোটি দ্বারা ছিন্ন অক্ষের অংশকে ঐ বিন্দুতে অধিবৃত্তের **উপ-স্পর্শক** (Subtangent) বলে।

অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব ও কোটি দ্বারা ছিন্ন অক্ষের অংশকে ঐ বিন্দুতে **উপ-অভিলম্ব** (Subnormal) বলে।

চিত্রে TN ও NG, P বিন্দুতে যথাক্রমে উপ-স্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব।



চিত্র 68

(i) অধিবৃত্তের কোন বিন্দুতে অঙ্কিত উপ-স্পর্শক অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

[The sub-tangent at any point of a parabola is bisected at the vertex.]

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\overline{AT}=\overline{AN}$.

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হইল,

$$yy_1=2a(x+x_1)$$

P বিন্দুতে স্পর্শক অক্ষের সহিত T বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

$\therefore$ T বিন্দুর কোটি $=0$.

$\therefore$ $0=2a(x+x_1)$, বা, $x=-x_1$.

অর্থাৎ, $\overline{AT}$ এর দৈর্ঘ্য $= x_1$. কিন্তু $\overline{AN} = x_1$;

$\therefore \quad \overline{AT} = \overline{AN}.$

(ii) অধিবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য একটি ধ্রুবক এবং অর্ধনাভিলম্বের সমান।

[The sub-normal at any point of a parabola is of constant length and is equal to the semi-latus rectum.]

উপ-অভিলম্ব $= \overline{NG}$.

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল,

$$yy_1 = 2a(x + x_1).$$

$\therefore \quad P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1).$$

অভিলম্ব x-অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে ;

$$\therefore \quad 0 - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1), \qquad \text{বা,} \quad x - x_1 = 2a.$$

অর্থাৎ, $\overline{AG} - \overline{AN} = 2a,$

বা, $\overline{\mathbf{NG}} = \mathbf{2a} =$ **অর্ধনাভিলম্ব = ধ্রুবক।**

(iii) $\overline{\mathbf{SG}} = \overline{\mathbf{SP}} = \overline{\mathbf{ST}}$.

$\overline{SG} = \overline{SN} + \overline{NG} = \overline{AN} - \overline{AS} + \overline{NG}$

$\quad = x_1 - a + 2a = x_1 + a \qquad [\because \ \overline{NG} = 2a.]$

আবার, $\overline{SP} = \overline{PM} = \overline{XN} = \overline{AN} + \overline{AX} = x_1 + a.$

এবং, $\overline{ST} = \overline{AT} + \overline{AS} = \overline{AN} + \overline{AS} = x_1 + a.$

$$\therefore \quad \overline{\mathbf{SG}} = \overline{\mathbf{SP}} = \overline{\mathbf{ST}}.$$

(iv) অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুতে অভিলম্ব ঐ বিন্দুর নাভিদূরত্বের ও অক্ষের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[The normal at any point of a parabola makes equal angles with focal distance of the point and the axis.]

যেহেতু, $\overline{SP} = \overline{PG},$ [(iii)-এ প্রমাণিত]

$\therefore \quad \angle SPG = \angle SGP$

$\therefore$ অভিলম্ব নাভিদূরত্ব ও অক্ষের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

(v) অধিবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু ও নিয়ামকের মধ্যে ছিন্ন অংশ নাভিতে একসমকোণের সমান সম্মুখকোণ করে।

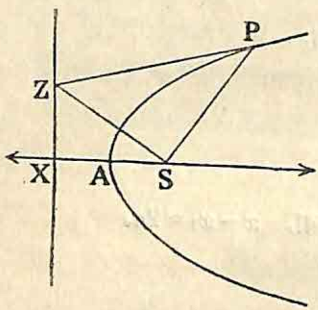
[The portion of a tangent to a parabola at any point on it, intercepted between the point of contact and the directrix subtends a right angle at the focus.]

P বিন্দুতে PZ স্পর্শকের সমীকরণ হইল,

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

এবং নিয়ামকের সমীকরণ হইল,

$$x + a = 0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$



চিত্র 69

∴ (1) এবং (2)-এর ছেদবিন্দু Z-এর স্থানাঙ্ক হইল,

$$x = -a \text{ এবং } y = \frac{2a}{y_1}\left(-a + x_1\right)$$

নাভি S-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$

$$\therefore \quad \overleftrightarrow{ZS}\text{-এর gradient} = \frac{\frac{2a}{y_1}\left(-a + x_1\right) - 0}{-a - a} = \frac{a - x_1}{y_1} \; ;$$

$$\text{এবং } \overleftrightarrow{PS}\text{-এর gradient} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - a} = \frac{y_1}{x_1 - a}.$$

$$\therefore \text{Gradient-দ্বয়ের গুণফল} = \frac{a - x_1}{y_1} \times \frac{y_1}{x_1 - a} = -1.$$

∴ $\overline{ZS}$, $\overline{PS}$-এর উপর লম্ব।

অতএব, $\angle PSZ$ = এক সমকোণ।

(vi) অধিবৃত্তের কোন ব্যাস অধিবৃত্তকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক ঐ ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-গুলির সমান্তরাল হয়।

[The tangent to a parabola at its point of intersection with a diameter is parallel to the system of chords bisected by it.]

মনে কর, অধিবৃত্ত $y^2=4ax$-এর জ্যা-গুলি $y=mx+c$ সরলরেখার সমান্তরাল।

$\therefore$ ব্যাসের সমীকরণ হইল, $y=\dfrac{2a}{m}$.

এই ব্যাস এবং অধিবৃত্তের ছেদবিন্দু পাওয়া যায় $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$.

এখন, $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$ বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হইল,

$$y\times\frac{2a}{m}=2a\left(x+\frac{a}{m^2}\right),$$

বা, $$y=mx+\frac{a}{m}.$$

স্পষ্টতঃই ইহা $y=mx+c$-এর সমান্তরাল।

$\therefore$ স্পর্শকটি জ্যা-গুলির সমান্তরাল।

7·2. উপবৃত্তের কয়েকটি জ্যামিতিক ধর্ম।

[Some geometrical properties of ellipse.]

(i) উপবৃত্ত ও উহার যে কোন ব্যাসের ছেদবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ঐ ব্যাসদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত সমান্তরাল জ্যা-গুলির সমান্তরাল হয়।

[The tangent to an ellipse at the extremity of any diameter is parallel to the system of chords bisected by the diameter.]

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, এবং জ্যা-গুলি $y=mx+c$ সরলরেখার সমান্তরাল।

$\therefore$ ব্যাসের সমীকরণ, $y=-\dfrac{b^2}{a^2m}.x$ ... (1)

এই ব্যাস উপবৃত্তকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে, তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিয়া পাওয়া যায়,

$$\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, -\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right) \text{ এবং } \left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$$

এই বিন্দুদ্বয়ে উপবৃত্তের স্পর্শকদ্বয় হইল,

$$\frac{mx}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}-\frac{y}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}=1,$$

$$\text{এবং}, -\frac{mx}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}+\frac{y}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}=1,$$

বা, $y=mx-\sqrt{a^2m^2+b^2}$,

এবং $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$

স্পষ্টতই ইহারা $y=mx+c$ এর সহিত সমান্তরাল জ্যা-গুলির সমান্তরাল।

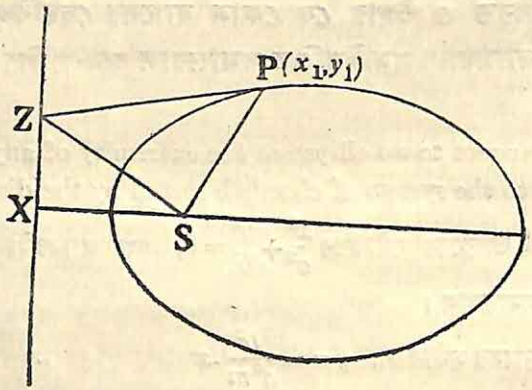
(ii) উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু ও নিয়ামকের মধ্যে ছিন্ন অংশ নাভিতে এক সমকোণের সমান সন্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।

[The portion of the tangent at any point of an ellipse intercepted between the point of contact and the corresponding directrix subtends a right angled at the focus.]

মনে কর, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ যে কোন বিন্দু।

P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ ...(1)

নিয়ামক ZX-এর সমীকরণ হইল, $x+\frac{a}{e}=0$ ... ...(2)



চিত্র 70

(1) এবং (2)-কে সমাধান করিয়া ছেদবিন্দু Z-এর স্থানাঙ্ক পাই,

$$\left\{-\frac{a}{e}, \frac{b^2(x_1+ae)}{aey_1}\right\}$$

S-এর স্থানাঙ্ক হইল $(-ae, 0)$.

$$\therefore \text{ SZ-এর gradient} = \frac{\frac{b^2(x_1+ae)}{aey_1}}{-\frac{a}{e}+ae} = -\frac{x_1+ae}{y_1}$$

SP-এর gradient $= \dfrac{y_1 - 0}{x_1 + ae} = \dfrac{y_1}{x_1 + ae}$.

$\therefore$ Gradient-দ্বয়ের গুণফল $= -\dfrac{x_1 + ae}{y_1} \times \dfrac{y_1}{x_1 + ae} = -1$.

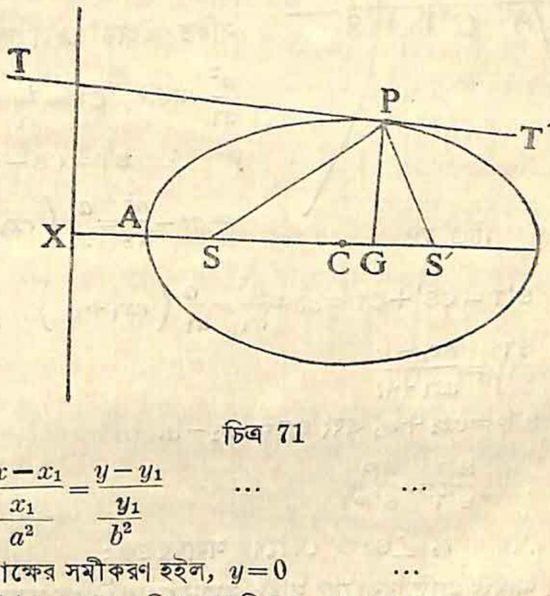
$\therefore$ $\angle$PSZ = এক সমকোণ।

(iii) উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অভিলম্ব নাভিদূরত্বদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[The normal at any point of any ellipse bisects the angle between the focal distances of the point.]

মনে কর, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের P(x_1, y_1) যে কোন বিন্দু।

P বিন্দুতে অভিলম্ব PG-এর সমীকরণ হইল,



চিত্র 71

$$\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

পরাক্ষের সমীকরণ হইল, $y = 0$ $\quad \cdots \quad \cdots (2)$

(1) ও (2) সমাধান করিয়া ছেদবিন্দু G-এর ভুজ পাওয়া গেল $e^2 x_1$, অর্থাৎ, CG $= e^2 x_1$.

এখন, SG = SC + CG $= ae + e^2 x_1 = e(a + ex_1) = e.$SP.

S′G = S′C − CG $= ae - e^2 x_1 = e(a - ex_1) = e.$S′P.

$\therefore$ $\dfrac{\text{SG}}{\text{S'G}} = \dfrac{\text{SP}}{\text{S'P}}$. $\therefore$ PG, $\angle$SPS′ কোণের সমদ্বিখণ্ডক;

অর্থাৎ, অভিলম্ব নাভিদূরত্বদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

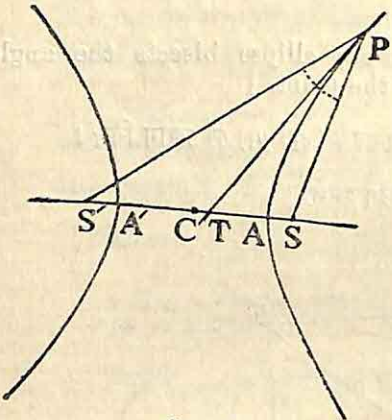
7·3. পরাবৃত্তের কয়েকটি জ্যামিতিক ধর্ম।

(Some geometrical properties of hyperbola.):

(i) পরাবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক ঐ বিন্দুর নাভিদূরত্বদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[The tangent at any point of a hyperbola bisects the angle between the focal distance of the point.]

মনে কর, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত $P(x_1, y_1)$ যে কোন বিন্দু।



চিত্র 72

P বিন্দুতে স্পর্শক PT-এর সমীকরণ হইল,

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad \cdots \quad (1)$$

x-অক্ষের অর্থাৎ $y=0$ এর সহিত ইহার ছেদবিন্দুর ভুজ হইল $\frac{a^2}{x_1}$ অর্থাৎ, $CT=\frac{a^2}{x_1}$

$$\therefore \quad ST=CS-CT$$

$$=ae-\frac{a^2}{x_1}=\frac{a}{x_1}\left(ex_1-a\right).$$

$$S'T=CS'+CT=ae+\frac{a^2}{x_1}=\frac{a}{x_1}\left(ex_1+a\right).$$

$$\therefore \quad \frac{ST}{S'T}=\frac{ex_1-a}{ex_1+a}$$

কিন্তু, $S'P=ex_1+a$, এবং $SP=ex_1-a$.

$$\therefore \quad \frac{ST}{S'T}=\frac{SP}{S'P}$$

$\therefore$ PT, $\angle SPS'$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক ;

অর্থাৎ, স্পর্শক নাভিদূরত্বদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

(ii) পরাবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু ও নিয়ামকের মধ্যে ছিন্ন অংশ নাভিতে এক সমকোণের সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[The portion of the tangent at any point of a hyperbola intercepted between the point of contact and the corresponding directrix subtends a right angle of the focus.]

ইহার প্রমাণ উপবৃত্তের (ii) এর প্রমাণের অনুরূপ।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1A

1. (i) 5, (ii) 13, (iii) 10, (iv) a.

2 (i) 13, (ii) 5, (iii) $\sqrt{10}$, (iv) 13, (v) $\sqrt{m^2+n^2}$, (vi) $2\sqrt{a^2+b^2}$, (vii) $(\cos\theta-\sin\theta)\sqrt{2}$.

7. $2\sqrt{5}$, $\sqrt{26}$, $\sqrt{34}$. 10. (3, 6).

11. (7, −3). 12. $3x+2y=1$.

প্রশ্নমালা 1B

1. (i) (4, 3), (ii) (6, 4), (iii) (2, 2), (iv) (0, 0).

2. (i) (5, 4), (ii) (3, 3), (iii) (−11, 16), (iv) (−2, −9).

3. 1 : 2. 4. 3 : 4. 5. (11, 4), (−3, −2), (−5, −8).

6. (4, 3), 7. (8, 8), 9. $\sqrt{41}$, $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$.

10. $(2a, 2b)$, $(3a, 3b)$.

প্রশ্নমালা 1C

1. (i) 24, (ii) 9, (iii) 11, (iv) 0, (v) $\frac{1}{2}\sin\theta$.

3. (i) 36, (ii) 9, (iii) 17. 7. $1\frac{3}{8}$.

প্রশ্নমালা 1D

1. $x=4y$. 2. $x+y=20$. 3. $x^2+y^2=25$. 4. $x+y=9$,

5. $4x^2+3y^2-8x-8y+8=0$. 6. $3x^2+4y^2-16x-16y+32=0$.

7. $x^2+y^2=4$. 8. $x^2+y^2-10x-24y=0$.

9. $x+2y+5=0$. 10. $2x+y=10$.

প্রশ্নমালা 2

1. (i) $x^2+y^2=a^2$, (ii) $x^2+y^2=ay$, (iii) $y=mx$, (iv) $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$, (v) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, (vi) $xy=a^2$, (vii) $(2x^2+2y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$.

2. (i) $r^2=a^2$, (ii) $\theta=\alpha$, (iii) $r=2a\cos\theta$, (iv) $r\cos\theta=2a\sin^2\theta$, (v) $r^2=a^2\cos 2\theta$, (vi) $r=g\cos\theta+f\sin\theta$.

3. (i) $2\sqrt{5}$, (ii) $\sqrt{79}$.

4. (i) $\frac{1}{4}(8-3\sqrt{3})$, (ii) $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$

প্রশ্নমালা 3A

1. (i) $\frac{2}{3}$; $(0, -\frac{2}{3})$, (ii) 3 ; $(0, -6)$
(iii) 1 ; $(0, 0)$, (iv) $-\frac{5}{2}$; $(0, -5)$.

2. (i) $3, \frac{3}{5}$; (ii) $\frac{5}{2}, -5$; (iii) $-\frac{5}{3}, -\frac{5}{4}$.

3. (i) $x\cos 60° + y \sin 60° = 2$.
(ii) $x\cos 135° + y\sin 135° = 5$.
(iii) $x\cos 225° + y\sin 225° = 4\sqrt{2}$.
(iv) $x\cos 300° + y\sin 300° = 3$.

4. (i) 2, (ii) 3, (iii) $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

5. (i) $3x - y + 2 = 0$, (ii) $3x + 4y - 7 = 0$,
(iii) $3x + 2y - 1 = 0$, (iv) $y(t + t_1) = 2x + 2att_1$.

6. $y = x + 4$. 7. $x - y\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$.

8. (i) $3x + 4y - 12 = 0$; (ii) $2x - 3y - 6 = 0$.

9. (i) $x + y = 3$; (ii) $x - y + 1 = 0$.

10. $3x + 4y = 46$. 11. $x - 2y + 10 = 0$.

12. $x + y = 6$. 13. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

14. $5x + 12y = \pm 60$ বা, $12x + 5y = \pm 60$.

15. $x + y - 1 = 0$, ছেদিতাংশ 1, 1 ; দূরত্ব $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

16. $x + 2y = 6$. 18. বাহুগুলি : $x = 3$, $2x - 7y + 22 = 0$, $6x + 7y + 10 = 0$.
এবং মধ্যমাগুলি : $10x - 7y - 2 = 0$, $2x + y - 2 = 0$ ও $2x + 7y - 6 = 0$.

19. $x + y = 5$, $3x + 2y = 12$.

প্রশ্নমালা 3B

1. (i) 135° বা 45°. (ii) 90°. (iii) 0°. (iv) $\tan^{-1}\frac{1}{7}$.

2. (i) (11, 5), (ii) (1, 2), (iii) $(1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5})$.

3. $2x - 9y + 46 = 0$. 4. $3x + 4y + 8 = 0$.

5. $5x + 2y - 17 = 0$. 6. $2x + 3y - 1 = 0$.

7. $16y - 22x - 17 = 0$.

8. $x + 7y - 21 = 0$; $3x + y - 3 = 0$; $x - 3y + 9 = 0$; (0, 3).

9. (i) $3x - 4y + 1 = 0$, (ii) $4x + 3y - 7 = 0$.

10. $4y + 11x = 10$. 11. $33x + 44y + 49 = 0$.

12. $xy_1 - yx_1 = 0$. 13. $4a(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0$.
14. $(5, 6)$. 15. $ax+by=a^2$.
16. $a=\frac{17}{4}, b=\frac{17}{3}$. 17. $2x+y-8=0,\ x-2y+1=0$.
18. $x=3, y=4$. 20. (i) $(3, -2)$, (ii) $(-\frac{2}{3}, -1)$.
21. (i) 2, (ii) $a=1$. (iii) $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$.

প্রশ্নমালা 3C

1. মূলবিন্দুর বিপরীত দিকে। 2. মূলবিন্দুর বিপরীত দিকে।
3. বিপরীত দিকে। 4. একই পার্শ্বে।
5. $\frac{2}{5}$. 6. (i) 4, (ii) 1, (iii) $\frac{9}{10}$.
9. $(\frac{25}{11}, \frac{61}{11})$.
14. $\left\{\frac{a}{b}\left(b \pm \sqrt{a^2+b^2}\right), 0\right\}$. 15. $y=1$; $\sqrt{3}x+y=2$.
16. $(3l-2m+n)^2=25(l^2+m^2)$.
17. $7x+9y=4$; $9x-7y-98=0$.
18. $99x-27y+29=0$; $21x+77y-179=0$.
19. $7x-4y+3=0,\ 4x+7y+11=0$, সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক $7x-4y+3=0$.
20. $99x-77y+51=0$.
21. $33x+9y=31,\ 112x-64y+141=0,\ x-7y+18=0$.
22. $4x-7y+2=0$. 23. $(3, -3)$.
24. $\frac{c-d}{\sqrt{1+m^2}}$. 25. 2.

প্রশ্নমালা 4

1. (i) $x^2+y^2=64$. (ii) $x^2+y^2-6y+5=0$.
(iii) $x^2+y^2-6x-10y+18=0$.
(iv) $x^2+y^2+4x-10y+22=0$.
2. $x^2+y^2-2x-6y=159$.
3. $x^2+y^2-8x-2y-51=0$: $4\sqrt{13}$.
4. (i) $(0, 0)$; 3.
(ii) $(0, 0)$; $\sqrt{11}$.
(iii) $(-1, -1)$; 5. (iv) $(2, 5)$; 3.
(v) $(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$; $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.
5. (i) $x^2+y^2-17x+41=0$. (ii) $x^2+y^2-6x+2y-15=0$.
(iii) $x^2+y^2-7x+5y+16=0$.

6. $x^2+y^2-6x+4y=0$. 7. $x^2+y^2-4x+6y+4=0$.
10. $x^2+y^2-2x-4y-15=0$.
11. $7x^2+7y^2+6x+4y-211=0$.
12. $15x^2+15y^2-94x+18y+55=0$.
13. $x^2+y^2-3x-4y=0$. 14. $x^2+y^2-5x-3y=0$.
15. $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ 16. $x^2+y^2-4x+6y+3=0$.
17. $x^2+y^2+3x-4y+6=0$. 18. $x^2+y^2-4x-3y=0$.
19. $x^2+y^2=36$.
20. $x^2+y^2+2\sqrt{21}\,y-4=0$; $x^2+y^2-2\sqrt{21}\,y-4=0$.
21. $x^2+y^2-30x-10y+25=0$.
23. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.
24. $x^2+y^2-17x-19y+50=0$.
25. $x^2+y^2-6x-4y+9=0$.
26. $x^2+y^2-(10\pm4\sqrt{3})(x+y)+(-5\pm2\sqrt{3})^2=0$.
27. $(x-1)^2+(y+3)^2=\frac{1}{5}$. 28. (11, 2) ; 20 ; বাহিরে।

প্রশ্নমালা 5A

1. (i) $(0, 0), (\frac{9}{4}, 0), 4x+9=0, 9, y=0$.
(ii) $(0,0), (\frac{3}{20}, 0), x+\frac{3}{20}=0, \frac{3}{5}, y=0$,
(iii) $(0, 0), (0, 3), y+3=0, 12, x=0$.
(iv) $(0, 0), (0, \frac{3}{8}), y+\frac{3}{8}=0, \frac{3}{2}, x=0$.
(v) $(0, 0), (0, -\frac{1}{2}), y=\frac{1}{2}, 2, x=0$.
(vi) $(-2, -3), (-\frac{3}{2}, 3), x=-\frac{5}{2}, 2, y=-3$.
(vii) $(3, -5), (3, -4), y=-6, 4, x=3$.
(viii) $(-1, 3), (-2, 3), x=0, 4, y=3$.

2. $\frac{9}{2}, (\frac{9}{8}, 0)$. 3. $(-2, -\frac{3}{2}), (-2, -\frac{5}{6}), \frac{8}{3}, 6y+13=0$. 4. (2, 4).
5. (i) $y^2=12x$. (ii) $y^2=12(x+3)$.
(iii) $y^2=-12(x+3)$. (iv) $x^2=12(y-3)$.
(v) $x^2=-12y$. (vi) $x^2=-12(y-3)$.
6. (i) $(y-2)^2=8(x+3)$. (ii) $(y+2)^2=-8(x-1)$
(iii) $(x-1)^2=8(y+1)$. (iv) $(x+1)^2=-8y$.
7. $9x^2+24xy+16y^2-92x-56y+124=0$; $\frac{8}{5}$.
8. $x^2+4y^2-4xy+4x+2y-1=0$.
9. $x^2+y^2-2xy+2x-6y+3=0$; $\sqrt{2}$
10. (1, 4) 11. $(\frac{3}{10}, 0)$
12. $\left\{\frac{ab}{4(a+b)}, 0\right\}$. 13. $9x^2+y^2-6xy-44x-52y+76=0$.

14. $(2, 6)$. **15.** (i) $3y^2=16x$; (ii) $4x^2=9y$

16. $(x-2)^2=-4(y-1)$. **17.** $(y+3)^2=\pm 12(x-2)$.

18. $a=-\frac{1}{8}, b=\frac{5}{4}, c=0$.

19. $(6, \pm 4\sqrt{3})$ **20.** (i) বাহিরে, (ii) ভিতরে।

প্রশ্নমালা 5B

1. (a) (i) $10, 6, \frac{18}{5}$; (ii) $\frac{4}{5}$;

(iii) $(0, 0), (\pm 5, 0), (\pm 4, 0)$;

(iv) $y=0,\ x=0,\ x=\pm\frac{25}{4}, x=\pm 4$.

(b) (i) $6,\ 4,\ \frac{8}{3}$; (ii) $\frac{\sqrt{5}}{3}$;

(iii) $(0, 0), (0, \pm 3), (0, \pm\sqrt{5})$.

(iv) $x=0,\ y=0,\ y=\pm\frac{9}{\sqrt{5}},\ y=\pm\sqrt{5}$.

(c) (i) $2\sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{2}$; (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

(iii) $(0, 0), (\pm\sqrt{2}, 0), (\pm 1, 0)$;

(iv) $y=0,\ x=0,\ x=\pm 2,\ x=\pm 1$.

2. $\frac{3}{5}$, $(-1, 3)$ ও $(5, 3)$, $3x+19=0$ এবং $3x-31=0$.

3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

4. $3x^2+5y^2=32,\ \frac{8\sqrt{6}}{5},\ \sqrt{\frac{2}{5}},\ \left(\pm\frac{8\sqrt{15}}{15},\ 0\right)$.

5. $\frac{1}{3}$. **6.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{20}=1$. **7.** $\frac{4x^2}{81}+\frac{y^2}{18}=1$.

8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. **10.** $x^2+2y^2=256$.

11. $20x^2+4y^2=5$. **12.** $3x^2+5y^2=32$.

13. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. **14.** 30 সেমি., 24 সেমি.।

15. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **16.** $7x^2+7y^2+2xy+10x-10y+7=0$.

17. $31x^2+16y^2-20xy-174x+12y+135=0$.

18. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1,\ \frac{2\sqrt{6}}{7}, (\pm 2\sqrt{6}, 0)$.

19 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$.

20. (i) $4x^2+9y^2-16x-54y+61=0$.
(ii) $9x^2+4y^2-36x-24y+36=0$.

21. $2\sqrt{3}, 2$. **22.** $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ বা $\frac{7\pi}{4}$.

প্রশ্নমালা 5C

1. $\frac{9}{2}$; $\frac{5}{4}$; $(\pm 4, 0)$; $(\pm 5, 0)$; 8, 6; $x=\pm\frac{16}{5}$.

2. (i) $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$; $x=\pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$; $\frac{2\sqrt{5}}{4}$.
(ii) $(3\pm 2\sqrt{5}, -2)$; $x=3\pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$; $\frac{2\sqrt{5}}{4}$.

3. (i) 6, 4; $\frac{\sqrt{13}}{3}$, $(2, -3)$; $(2\pm\sqrt{13}, -3)$,
$13x=26\pm 9\sqrt{13}$.
(ii) 8, 6; $\frac{5}{4}$, $(-4, -1)$; $(1, -1)$ ও $(-9, -1)$,
$x=-\frac{4}{5}$ ও $x=-\frac{36}{5}$

4. $(2, -1)$; $x-2=0$, ও $y+1=0$.

5. $\frac{13}{12}$; $(\pm 13, 0)$.

6. (i) $9x^2-16y^2=576$. (ii) $x^2-y^2=32$.
(iii) $2x^2-3y^2=72$. (iv) $12x^2-16y^2=192$.
(v) $16x^2-9y^2=36$. (vi) $2x^2-y^2=7$.
(vii) $5x^2-9y^2=36$. (viii) $3x^2-2y^2=1$.

7. (i) $7x^2+7y^2-18xy-130x-118y+431=0$.
(ii) $8x^2+15y^2-24xy-34x+46y+12=0$.
(iii) $2x^2-7y^2-12xy-14x-18y+62=0$.

8. $3x^2-y^2-24x-10y-25=0$; 24.

9. $2x^2-2y^2=a^2$. 10. $\frac{5}{\sqrt{2}}$, 4.

11. $3x^2-4y^2=-48$. 12. $x^2-y^2=5$.

প্রশ্নমালা 6A

1. (i) $(4, 0)$, $(0, 4)$. (ii) $(5, 0)$, $(3, 4)$.
(iii) $(3, 0)$, $(0, 3)$. (iv) $(-1, -1)$, $(-1, -1)$.

2. (i) $(2, 4)$; $(18, 12)$. (ii) $(a, 2a)$, $\left(\frac{a}{9}, -\frac{2a}{3}\right)$.
(iii) $(8, 4)$, $(2, -2)$. (iv) $\left(\frac{5}{27}, \frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{5}{3}, -2\right)$

3. (i) $(0, 3), (6, 0)$. (ii) $(3, 0), (0, 2)$.
(iii) $(3, 1), (2, 2)$. (iv) $(1, 4), (-6, 1)$.
4. (i) $(1, 1)\ (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. (ii) $(2, -1), (-4, 3)$.
5. $\sqrt{90}$. 6. $6\sqrt{2}$. 7. $2\sqrt{2}$. 8. $\sqrt{35}$.
9. $\frac{14}{3}\sqrt{2}$. 10. $\frac{15}{2}\sqrt{2}$.
11. $\frac{2ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}\cdot\sqrt{1+m^2}$.

প্রশ্নমালা 6B

1. (i) $3x-7y+58=0$. (ii) $x-2y+10=0$.
(iii) $3x+4y=32$. (iv) $x-2y=0$.
2. (i) $2y=5x$. (ii) $3x-y=0$.
(iii) $x+y=2$. (iv) $x+y-1=0$.
3. (i) $3x+4y+12=0$ (ii) $2x-y-2=0$.
(iii) $x+y=3$. (iv) $2x+y+3=0$. (v) $x-y-3=0$.
4. (i) $x-y-6=0$. (ii) $2x+y-9=0$.
(iii) $2x-y+12=0$. (iv) $y=x+9$.
5. (i) $x-y=7$. (ii) $x+3y=14$. (iii) $x-10y=1$.
6. (i) $x+y=2$. (ii) $2x+y+1=0$.
(iii) $40x+4y-17=0$.
7. (i) $3x+4y=4$; $4x-3y=22$.
(ii) $3x+11y=4$; $11x-3y=58$.

প্রশ্নমালা 6C

I

1. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$. 2. $x^2+y^2-4x-2y+4=0$.
3 $x^2+y^2-10x-10y+25=0$. 4. $(7, 3), (2, 8)$.
6 $(2, 2\sqrt{3})$. 7. $(-1, 1)$.
8 $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. 9. ± 5.
10. $k=-6$ বা, 2, স্পর্শবিন্দু $(1, 4)$ এবং $(3, 2)$.
12 $(-3, 1)$. 13. $4x+3y\pm 25=0$.
14 $4x+3y+19=0$; $4x+3y-31=0$.
15. $y=3x-4\pm 4\sqrt{10}$. 16. $x+2y+5=0$, $x+2y-15=0$.
17. $12x-5y+54=0$, $12x-5y=232$.
18 $y=\sqrt{3}x\pm 2\sqrt{3}$. 19. $y=x\pm 4\sqrt{2}$.
20 $n^2=a^2(l^2+m^2)$. 21. $n=0$.

22. $lg+mf-n=0$. 23. $(4, -2)$
24. $(11, -6)$. 27. $c=2\pm 2\sqrt{l+m^2}$.
30 $5x^2+5y^2-10x+30y+49=0$. 31. $y=\pm\frac{5}{12}(x-13)$.
32. (i) $\sqrt{41}$; (ii) $\sqrt{105}$. 34 $x^2+y^2=\dfrac{1}{a^2}$.

II

35. $(\frac{3}{4}, 3)$ 36. $(0, 2a)$ 38. $(am^2, -2am)$. 40. 6.
41. 3. 42. $m=-\frac{3}{5}$, $c=-5$.
46. $2x+y+1=0$. $(\frac{1}{2}, -2)$ এবং $2y-x-8=0$, $(8, 8)$.
47. $y=\sqrt{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
48. (i) $3y=9x+2$. (ii) $x+3y+18=0$.
49. (i) $9x+12y+4=0$. (ii) $256x+288y+81=0$.
52. $(6, -4\sqrt{3})$. 54. $(2a, -2\sqrt{2a})$, 56, $c=-2am-am^3$.
57. $2x+3y+36=0$. 58. $y=\pm(x+2a)$.

III

61. $a^2l^2+b^2m^2=1$. 62. $(2, 1)$. 64. $x+y=5$,
65. $y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{3a^2+b^2}$ 66. $x-y+4=0$, $x=y+4$.
67. $2x+5y=12$, $2x+5y+12=0$. 68. $3x-4y\pm 12=0$. 69. 3.
70. $x-4y-13=0$, $4x-5y+5=0$.

IV

73. $(1, 1)$. 74. $(3, 2)$. 75. $2x-y\pm\sqrt{15}=0$.
76. $3x-2y\pm 7=0$. 77. 2. 78. $y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{23}$.

প্রশ্নমালা 6D

1. (i) $3x-y=0$. (ii) $3x+4y-18=0$.
2. (i) $y=4$. (ii) $x=4$.
3. (i) $4x-9y=0$. (ii) $8x-25y=0$. 4. $4x-25y=0$.
5. $x+y-2=0$. 6. $6x-y-11=0$. 8. $32x+25y+89=0$.
9. $27x-4y-77=0$. 12. $9y=32x$.

উচ্চ মাধ্যমিক পরীক্ষা—১৯৭৮

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

Group—C

11. (a) OX ও OY কোন লম্ব-কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়। আবার O এবং OX কোন মেরু স্থানাঙ্কের যথাক্রমে মূলবিন্দু ও মূল রেখা।

(i) যদি P বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক $(2, 30°)$ হয়, তবে উহার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ $(\sqrt{3}, 1)$]

(ii) যদি P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(0, 2)$ হয়, তবে উহার মেরু স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। $\left[\text{উঃ } \left(2, \frac{\pi}{2}\right)\right]$

(iii) কোন সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ $y = x \tan \alpha$ হইলে উহার মেরুর সমীকরণ নির্ণয় কর। [উঃ $\theta = \alpha$]

(b) A ও B দুইটি বিন্দু যাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-5, 3)$ ও $(2, 4)$; P বিন্দু এমনভাবে চলমান যে $PA : PB = 3 : 2$; P এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। ইহা কিরূপ বক্ররেখা নির্দেশ করে? [উঃ $5x^2+5y^2-76x-48y+24=0$]

12. (a) $x+2y+3=0$ ও $3x+4y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ও $y=-\frac{5}{8}x$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [উঃ $5x+8y+13=0$]

(b) $3x-4y-5=0$ ও $4x+3y+2=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। যে কোণের মধ্যে মূল বিন্দু অবস্থিত, সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক কোন্‌টি?

[উঃ $(15-4\sqrt{13})\,x-(20+3\sqrt{13})\,y-25-2\sqrt{13}=0$;
$(15-4\sqrt{13})\quad x-(20+3\sqrt{13})\quad y-25-2\sqrt{13}=0$]

13. (a) পরীক্ষা করিয়া দেখাও যে, $x^2+y^2-x-4y+7=0$ সমীকরণটি কোন বৃত্তকে বুঝায় কিনা। [উঃ না]

(b) নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি ঠিক এবং কেন? "(2, 1) বিন্দুটি $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ বৃত্তের (i) উপরে; (ii) ভিতরে; (iii) বাইরে অবস্থিত।" [উঃ উপরে অবস্থিত]

(c) প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-4=0$ এবং $2x^2+2y^2-11=0$ বৃত্তদ্বয় এককেন্দ্রীয়।

14. (a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2$ উপবৃত্তের উপরিস্থিত $(3, 2)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[উঃ $2x+3y=12$]

(b) $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা (eccentricity) কত ? $(3, 0)$ বিন্দুতে এই পরাবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [উঃ $\sqrt{13}/3$; $x=3$]

15. (a) নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোনটি সত্য ?

"কোন অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা ইহাকে (i) একটিমাত্র বিন্দুতে, (ii) দুইটি বিন্দুতে (iii) দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করে।" [উঃ সত্য]

(b) $(1, 2)$ বিন্দুতে $y^2=4x$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[উঃ $y=x+1$]

(c) $2x+3y=1$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক। অধিবৃত্তটির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[উঃ $\frac{8}{9}$.]

উচ্চ মাধ্যমিক পরীক্ষা—১৯৭৯

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

Group—C

11. (a) যদি $A=(1, 5)$ এবং $B=(-4, 7)$ হয়, তাহা হইলে P বিন্দু নির্ণয় কর। যাহা AB কে 2 : 3 অনুপাতে অন্তঃবিভক্ত করে। [উঃ $(-1, \frac{29}{5})$]

(b) স্থানাঙ্ক জ্যামিতির নিয়মে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঐ ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যোগ করিয়া প্রাপ্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের চারগুণ।

[পৃঃ 19 ; 4 দেখ]

(c) যদি তিনটি বিন্দু (a, b), $(a+k\cos\alpha, b+k\sin\alpha)$ এবং $(a+k\cos\beta, b+k\sin\beta)$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত ফলগুলির মধ্যে কোন্‌টি সত্য এবং কেন ?

(i) $|\alpha-\beta|=\frac{\pi}{4}$; (ii) $|\alpha-\beta|=\frac{\pi}{2}$;

(iii) $|\alpha-\beta|=\frac{\pi}{6}$; (iv) $|\alpha-\beta|=\frac{\pi}{3}$.

[উঃ (iv)]

12. (a) $x-y+4=0$, $2x+3y-6=0$, $8x+7y-26=0$ এই সরলরেখাগুলি একবিন্দুগামী কিনা তাহা পরীক্ষা কর। [উঃ সমবিন্দু নয়]

(b) $y=mx$ এবং $y=m'x$ এই সমীকরণ বিশিষ্ট সরলরেখাদ্বয়ের অন্তবর্তী কোণের পরিমাপের সূত্র নির্ণয় কর। ইহা হইতে সরলরেখাদ্বয়ের পরস্পর লম্ব হইবার শর্ত বাহির কর। [অনু. 3·11 এবং 3·13 দেখ]

(c) একটি সরলরেখা (α, β) এই নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। প্রমাণ কর যে ঐ সরল রেখার যে অংশ অক্ষদ্বয়ের অন্তবর্তী, তাহার মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথ $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}=2$.

13. (a) $(1, 3)$, $(2, -1)$ এবং $(-1, 1)$ এই তিনটি বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। $\left[\text{উঃ} \left(\frac{11}{10}, \frac{9}{10}\right);\ \frac{1}{10}\sqrt{442}\right]$

(b) $x^2+y^2-6x+4y-7=0$ বৃত্তের যে স্পর্শক $2x-y+3=0$ সরলরেখার উপর লম্ব, তাহা নির্ণয় কর। [উঃ $x+2y+11=0$; $x+2y=9$]

(c) বৃত্তের কেন্দ্র হইতে উহার কোন স্পর্শক টানা সম্ভব কি ? যুক্তি দাও।

[উঃ না ; দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে]

14. (a) $y^2=12x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক x অক্ষের সহিত $60°$ কোণ উৎপন্ন করে, তাহা নির্ণয় কর। [উঃ $y=\pm\sqrt{3}(x+1)$]

(b) $y^2=2ax$ অধিবৃত্ত $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর মধ্য দিয়া যায়। ইহার নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ $(\frac{3}{10}, 0)$]

(c) প্রমাণ কর যে, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভি হইতে ইহার কোন স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক।

15. (a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এই পরাবৃত্ত (5, 0) এবং ($-7, \frac{2}{5}$) বিন্দুগামী। a এবং b-র মান নির্ণয় কর। [উঃ $a=5,\ b=\frac{1}{6}\sqrt{6}$]

(b) যে উপবৃত্তের উপাক্ষের দৈর্ঘ্য উহার নাভিদ্বয়ের মধ্যের দূরত্বের সমান, তাহার উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। $\left[\text{উঃ}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

(c) একটি 'কণিকের' উপরিস্থিত একটি বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য, নাভি হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্বের অর্ধেক—ইহা প্রদত্ত। নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি সত্য এবং কেন?

(i) 'কণিকটি' একটি অধিবৃত্ত ;

(ii) 'কণিকটি' একটি উপবৃত্ত ; [উঃ (iii)]

(iii) 'কণিকটি' একটি পরাবৃত্ত ;

(iv) এইরূপ কোন 'কণিক' থাকা সম্ভব নহে।